COLEGIO DE BACHILLERES

MATEMÁTICAS I

COLEGIO DE BACHILLERES

Colaboradores:
Olivia Hernández Romero
Juan Pérez Rodríguez
Eloisa Poot Grajales

Asesoría Pedagógica
Dora María Mireles Alvarado.

Revisión de Contenido
Guadalupe Xochitl Chávez Pérez

Diseño Editorial
Leonel Bello Cuevas
Javier Darío Cruz Ortiz

Í N D I C E

INTRODUCCIÓN

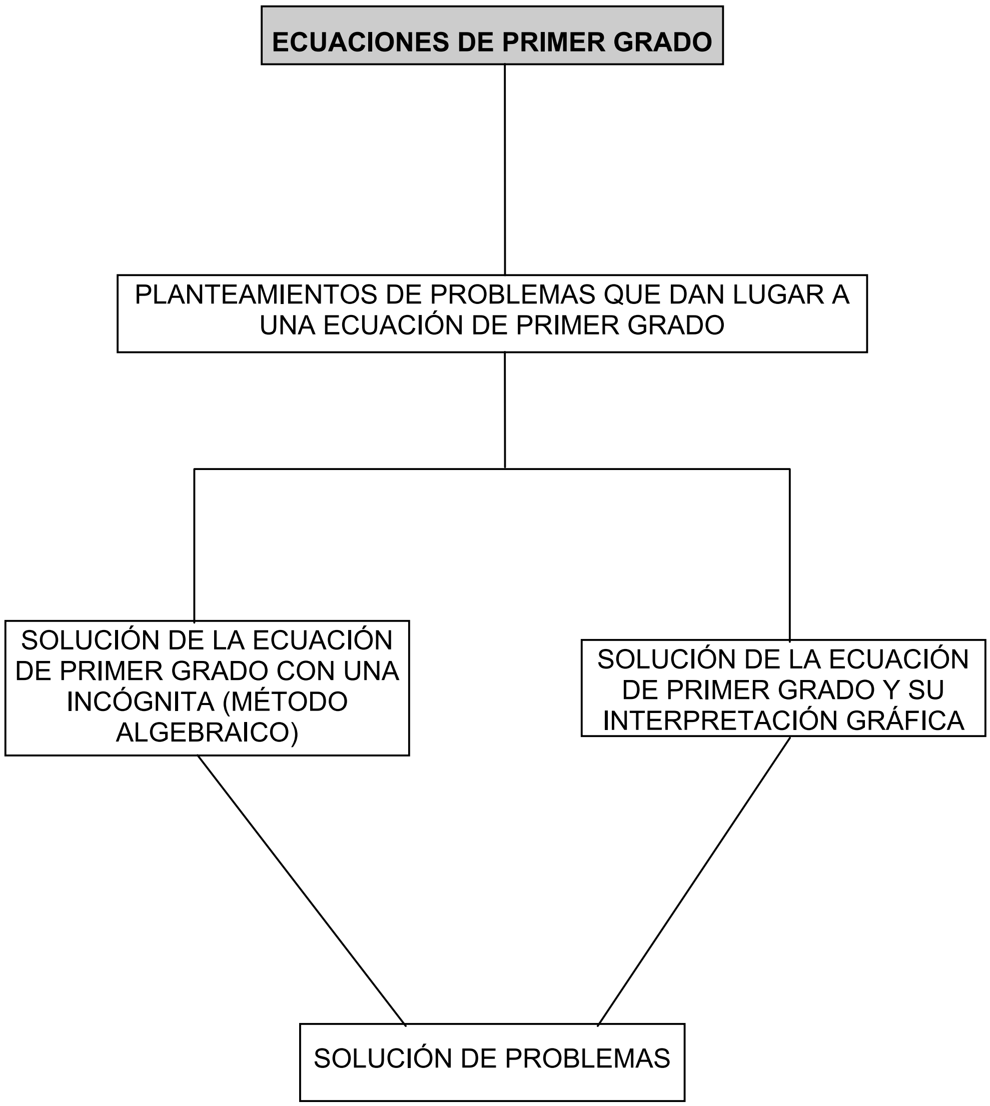
Una de las preocupaciones más antiguas que el hombre ha tenido, es buscar procedimientos más sencillos que simplifiquen y faciliten la resolución de problemas matemáticos. El álgebra en este renglón ha hecho enormes aportes que han permitido la evolución y progreso de la Ciencia Matemática.

Con la aplicación de las ecuaciones de primer grado se resuelven problemas aritméticos, geométricos, trigonométricos, físicos, etc., y en otras áreas de conocimiento como la química, la biología, física entre otras.

También podemos considerarla en nuestra vida cotidiana y por ello es necesario aprender a interpretar, construir y operar con modelos algebraicos, por ejemplo, con frecuencia encontramos diversos modelos de prendas de vestir, de relojes, de comportamientos humanos, etc. De igual manera, el razonamiento nos permite representar, mediante modelos matemáticos aquellas situaciones problemáticas que para su solución requieren la relación de proposiciones.

El saber establecer el modelo algebraico adecuado para solucionar un problema. En muchos casos, nos enfrentamos a problemas en los cuales desconocemos los datos que están relacionados y el encontrarlos es básico para tomar una decisión. Estos problemas pueden dar lugar a una ecuación lineal o a un sistema de ecuaciones, en el que plantean dos modelos algebraicos que se resuelven simultáneamente, a través de diversos métodos.

Para este fascículo estudiaremos los planteamientos de problemas que dan lugar a modelos generalizadores (ecuaciones lineales), así como los modelos algebraicos para la solución de problemas. El siguiente esquema te ubicará en la relación que tiene cada uno de los temas que estudiarás:


ECUACIONES DE PRIMER GRADO
PLANTEAMIENTOS DE PROBLEMAS QUE DAN LUGAR A UNA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO
SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA (MÉTODO ALGEBRAICO)
SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO Y SU INTERPRETACIÓN GRÁFICA
SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

CAPÍTULO 1

MODELOS GENERALIZADORES: ECUACIONES DE PRIMER GRADO

1.1 ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

1.1.1 Planteamiento de problemas que dan lugar a una Ecuación de Primer Grado con una Incógnita.
1.1.2 Solución de Ecuaciones de Primer Grado con una Incógnita por el Método Algebraico.
1.1.3 Solución de Ecuaciones de Primer Grado y su Interpretación Gráfica.
1.1.4 Solución de Problemas que dan lugar al Planteamiento de una Ecuación de Primer Grado con una Incógnita.

P R O P Ó S I T O

Con el estudio de este capítulo integrarás y aplicarás los conocimientos adquiridos en los temas anteriores:

¿QUÉ APRENDERÁS?

Lograrás desarrollar la observación y el espíritu crítico que debes tener para el planteamiento y resolución de problemas matemáticos, problemas de otras ciencias que requieren de modelos matemáticos y problemas que se te presentan en tu vida cotidiana.

¿CÓMO LO LOGRARÁS?

Estudiando situaciones de la vida real que generan problemas que requieren el planteamiento de ecuaciones de primer grado y su solución, a través de la identificación de los elementos fundamentales de estos problemas y traduciéndolos al lenguaje algebraico.

¿PARA QUÉ TE VA A SERVIR?

Con la solución de ecuaciones de primer grado, nos permitirá aplicar en diferentes problemas aritméticos, geométricos, trigonométricos físicos, etc., y conocer el valor de sus variables.

CAPITULO 1. MODELOS GENERALIZADORES: ECUACIONES DE PRIMER GRADO

En los fascículos anteriores estudiamos tanto el concepto como la operación de números reales con lo que logramos pasar de la Aritmética al Álgebra y llegar al conocimiento de sus elementos, simbología, nomenclatura y operaciones.

Ahora nuestro objetivo es plantear y solucionar problemas que conduzcan a una ecuación de primer grado, y que pueden presentarse en la vida real.

Con frecuencia hemos escuchado decir a algunas personas: "Tengo muchos problemas. Ya no sé que hacer para salir de esto". Y sucede que cuando nos plantean su problema en ocaciones es más fácil encontrar una solución. Esto sucede porque podemos analizar el problema observando los factores que intervienen.

Por ejemplo el siguiente problema: Dos atletas Juan y Carlos corren en una pista; si Juan hizo un tiempo de "x" y Carlos hizo 5 minutos menos que Juan. ¿Qué tiempo hizo cada uno?, si la suma de ambos tiempos es de 40 minutos.

PREGUNTAS:

¿Reconoces las variables e incógnitas?.

¿Como sería el modelo matemático para el problema planteado?.

A través del análisis y la relación de las actividades que contiene este fascículo podrás resolver estas preguntas.

1.1 ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Con el estudio de este fascículo lograrás integrar los conocimientos adquiridos en los temas anteriores, analizarás problemas que conduzcan al planteamiento de una ecuación de primer grado conjugando los aspectos algebraicos y geométricos, con el fin de conocer los métodos de solución (algebraico y gráfico).

Recordarás que una ecuación es un tipo de igualdad que se satisface únicamente para ciertos valores.

Por pertenecer a las igualdades contiene dos miembros separados por un signo igual.
PRIMER MIEMBRO = SEGUNDO MIEMBRO

Los diferentes valores que forman cada uno de los miembros se llaman términos y se encuentran separados por signos (+) más o (-) menos. Cada miembro puede tener más de un término.

Las letras que figuran en la ecuación, y de cuyo valor depende que se cumpla con la igualdad, se llaman incógnitas.

Por ejemplo: $3x - 2 = x + 6$

ECUACIÓN	INCÓGNITA	PRIMER MIEMBRO	SEGUNDO MIEMBRO
$3x - 2 = x + 6$	x	$3x - 2$	$x + 6$
$\frac{x-4}{3} = 5$	x	$\frac{x-4}{3}$	5
$2x + 3a = 4 + a$	x	$2x + 3a$	$4 + a$

1.1.1 PLANTEAMIENTOS DE PROBLEMAS QUE DAN LUGAR A UNA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

En este subtema se establece en primer lugar una comparación de los diferentes modelos que existen para representar situaciones o fenómenos y cómo en matemáticas también hay modelos que se expresan por medio de proposiciones lógicas y después se transforman en ecuaciones.

Por ejemplo:

Las compañías fraccionadoras construyen una casa modelo para que los compradores la vean y conozcan el tipo de casa que ofrecen. Ésta representa a todas las que de ese tipo se construirán en el fraccionamiento propuesto (figura 1).

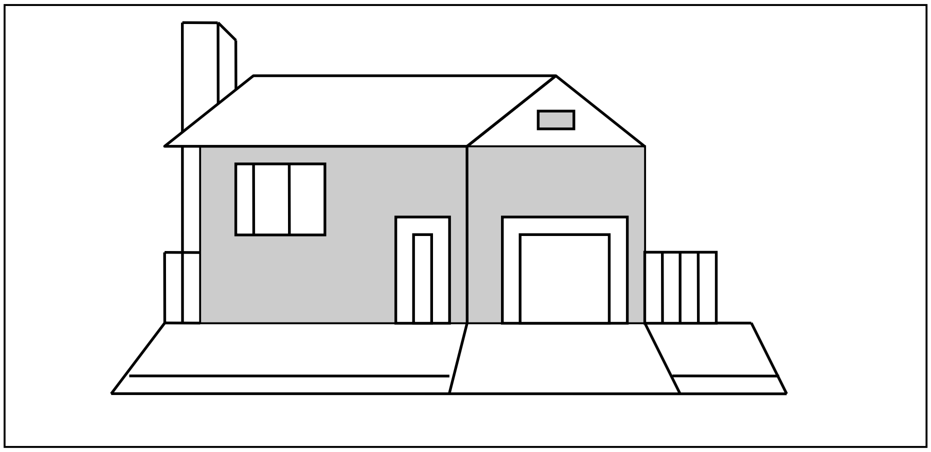


Figura 1.

Así mismo, las compañías distribuidoras de automóviles exhiben uno que es el modelo* del año, y que representa a todos los automóviles de una marca y clase (figura 2) que se construyeron en ese año.

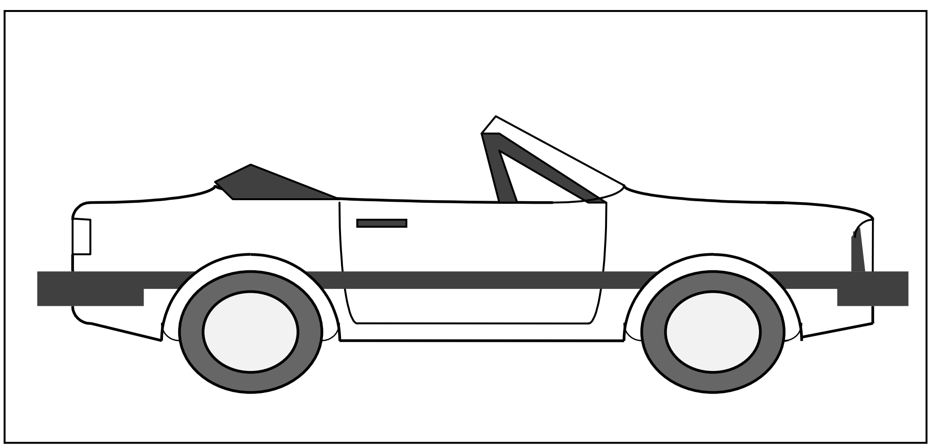


Figura 2.

* El sentido de la palabra "modelo" en estos ejemplos, es muy distinto al sentido que se le da en matemáticas o en la frase "modelos matemáticos" o "modelos algebraicos".

En matemáticas también hay modelos que representan diferentes situaciones o fenómenos; estos modelos primero se expresan por medio de proposiciones lógicas y después se transforman en ecuaciones. Veamos el siguiente ejemplo:

Dos corredores se entrenan en una pista para correr el maratón. Si el corredor A hizo un tiempo "x" al correr una determinada distancia y el corredor B hizo el doble del tiempo del corredor A , menos 5 minutos, ¿qué tiempo hizo cada uno, si la suma de los tiempos es de 40 minutos.

Proposiciones del problema:

Si el tiempo del corredor A es "x", entonces, el tiempo del corredor B es 2x - 5, y como la suma de los dos tiempos es 40 minutos, la relación de las proposiciones se puede expresar así: $$x + (2x - 5) = 40$$ que es el modelo matemático del problema propuesto.

La ecuación de primer grado con una incógnita es el modelo matemático que se obtiene al transformar una proposición lógica en una simbólica.

Ahora analiza los problemas que se plantean a continuación y compáralos con el anterior.

1. La edad de Pedro y la de su primo suman 40 años. Si Alberto tiene el doble de la edad de Pedro, menos 5 años, ¿qué edad tiene cada uno?.

2. Para obtener 40 litros de una solución normal se mezclan dos soluciones de diferente concentración. Si el número de litros de la solución A es el doble de litros de la solución B, menos cinco litros, ¿cuántos litros se requieren de cada solución?.

3. A dos familias se les repartió azúcar de un bulto de 40 kg. Si la familia B recibió el doble de kilogramos que recibió la familia A, menos 5 kg., ¿cuánto recibió cada familia?.

4. El número de tornillos que producen dos obreros en una fábrica es de 40 por turno. Si el obrero B produce el doble de tornillos que produce el obrero A, menos cinco, ¿cuántos tornillos produce cada uno?.

Después de analizar y comparar los problemas ¿qué similitud encuentras entre ellos? ¿responden al modelo matemático que se obtuvo del primer problema?.

En efecto, un modelo matemático puede representar a un conjunto de proposiciones lógicas que describen problemas diferentes. Observa que en estos problemas se tienen dos incógnitas o valores desconocidos, cuyo valor se quiere conocer. Estas incógnitas están relacionadas de tal manera que una se puede expresar en términos de la otra.

Hay ocasiones en que “no es obvio” como expresar una incógnita en términos de “otra”, por lo que es necesario usar otra letra para representar a esta incógnita, dando lugar a un sistema de ecuaciones con dos incógnitas y no a una sola ecuación. Por otra parte, hay problemas que pueden presentar más de dos incógnitas.

EJEMPLO:

Tres obreros producen 100 piezas por turno. Si el obrero B produce el doble de piezas que el obrero A, menos cinco, y el obrero C produce dos tercios de lo que produce el obrero B ¿cuántas piezas produce cada uno?.

Las incógnitas son:

Número de piezas que produce A: x
Número de piezas que produce B: $2x - 5$
Número de piezas que produce C: $\frac{2(2x-5)}{3}$

Como entre los tres obreros producen 100 piezas, debe entenderse que su suma es 100:

$$x + (2x - 5) + \frac{2(2x-5)}{3} = 100$$

y esta expresión matemática es el modelo matemático del problema.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

A continuación te presentamos algunos modelos matemáticos, pero al contrario de lo que hemos expuesto hasta aquí, invertimos el procedimiento para que propongas por lo menos dos problemas que satisfagan cada uno de los siguientes modelos:

1. $2x + 3 = 5$
2. $5x + 2 = 12$
3. $x + (3x + 1) = 17$
4. $2x + (2x - 1) = 11$
5. $x + 3(5x + 2) = 22$
6. $3y + 4 = 9 + 5$
7. $5x - (x + 1) = 24$
8. $4z + \frac{2}{5}(z + 2) = 14$
9. $2x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 100$
10. $\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{3} + \frac{x+1}{9} = 17$

Nuevamente, si analizas los problemas que se listaron en los ejemplos anteriores y los comparas con los ejercicios que acabas de realizar , notarás que los primeros problemas están planteados en lenguaje cotidiano y los ejercicios en lenguaje algebraico o simbólico, Más aún, para lograr la transformación de lenguaje común a lenguaje algebraico se observa en general el siguiente procedimiento:

PROCEDIMIENTO:

a) Leer detenidamente el problema, a fin de reflexionar sobre la información dada y entender qué es lo que se desea obtener.

b) Identificar los datos (cantidades conocidas) y la o las incógnitas (cantidades desconocidas o por conocer), así como las relaciones entre ellos, datos e incógnitas.

c) Separar cada una de las partes del problema, nombrando a la o a las incógnitas. Si es una incógnita representarla con una de las últimas letras del alfabeto (u, v, w, x, y, z). En caso de que sean dos o más incógnitas considerar una de ellas como referencia y las demás se representan con la misma letra relacionándola con los datos correspondientes.

d) De acuerdo con las condiciones del problema, se expresa la igualdad correspondiente, que es el modelo matemático requerido. A este modelo matemático, en estos casos, se le conoce como *ecuación de primer grado con una incógnita.*

Para reafirmar este procedimiento se desarrollan los siguientes ejemplos :

1) La suma de tres números enteros consecutivos es 75. Obtener dichos números.

PROCEDIMIENTO:

¿ Qué se desea conocer del problema?

a) Ya que leímos detenidamente el problema, se concluye que se desea conocer tres números.

¿Qué datos nos proporciona el problema ?

b) Los datos son:

-que se tienen tres números enteros
-que son consecutivos
-que suman 75
-las incógnitas son los números consecutivos

Nota:

En éste como en otros casos, es conveniente recordar o investigar los conceptos que se requieren

En general, un número consecutivo “es el que sigue en el orden considerado”. Para el problema se requiere de un “número entero consecutivo”; entonces se trata de números consecutivos cuya diferencia entre dos contiguos es de uno.

¿Cómo se establece el modelo?

c) Se nombran y representan; en este problema, incógnitas; y se determina a la expresión algebraica de cada una de ellas.

Nombre de las incógnitas	*Representación algebraica*
Número menor	x
Número intermedio	x + 1
Número mayor	x + 2

(Recuerda el concepto de número consecutivo)

¿Cómo se determina el modelo algebraico?

d) Se expresa la igualdad.

La suma de los tres números enteros consecutivos es 75.

$$x+(x+1)+(x+2)=75$$

2) La edad de Juan es el triple de la de Pedro y hace cinco años la edad de Pedro era un quinto de la de Juan. Obtener las edades actuales de Juan y de Pedro.

a) Se lee detenidamente el problema. Se requiere calcular la edad de las dos personas.

b) Datos. La edad de Juan es el triple de la de Pedro. Hace cinco años la edad de Pedro era un quinto de la de Juan.

c) Incógnitas. Edad actual de Pedro y Juan.

Nombre de las incógnitas	*Representación algebraica*
Edad actual de Pedro	x
Edad actual de Juan	3x
Edad de Pedro hace 5 años	x - 5
Edad de Juan hace 5 años	3x -5

d) Se expresa la igualdad correspondiente. Hace cinco años la edad de Pedro era un quinto de la de Juan.

$$x-5=\frac{(3x-5)}{5}$$

Analiza nuevamente los ejemplos y responde estas preguntas:

a) En el primer ejemplo se consideró como referencia el número menor, la pregunta es: ¿se pueden considerar como referencia las otras dos?. ¿Cómo expresar cada una de estas incógnitas?

b) Con base en lo anterior, ¿las siguientes expresiones son equivalentes?

"x" es una unidad mayor que "y",
"y" es una unidad menor que "x".

c) Si la expresión "hace cinco años" se le consideró como "sustraendo a 5", ¿cómo se considerar la expresión "dentro de cinco".

d) Estos son ejemplos sencillos de dos expresiones equivalentes, expresiones como las anteriores son las que se deben saber interpretar para transformarlas a lenguaje algebraico.

Analiza este otro ejemplo:

3. Dos vendedores, A y B, se encuentran en diferentes ciudades. Por razones de trabajo deben encontrarse en una ciudad que está entre las dos ciudades. ¿Dónde está A y dónde está B?. Las tres ciudades se localizan en una línea recta.

La distancia que separa a los vendedores y que deben recorrer en automóvil es de 640 km. Si A viaja a 70 km/h y B a 90 km/h, ¿a qué distancia de la ciudad de A se encuentra la ciudad donde deben entrevistarse?, ¿cuánto tiempo tarda cada vendedor para llegar a su destino?.

a) En este caso , se considera que deben utilizarse: $d = vt$; que es la expresión algebraica (fórmula) de distancia en movimiento uniforme. Se desea saber cuál es la distancia.

b) Datos

-velocidad del automóvil de A: 70 km/h
-velocidad del automóvil de B: 90 km/h
-distancia entre las dos ciudades de donde parten A y B: 640 km
-incógnitas. Distancia de donde parte A a la ciudad de encuentro; tiempo empleado por cada vendedor para llegar a la misma ciudad.

c) Incógnitas

-tiempo empleado por A para llegar a la ciudad: x
-tiempo empleado por B para llegar a la ciudad: x
-distancia recorrida por A : 70x
-distancia recorrida por B: 90x.

d) Por las condiciones del problema:

$70x + 90x = 640$

Ahora

a) En este caso, ¿del modelo propuesto se obtiene directamente la distancia requerida?.

b) Entonces, ¿qué es lo que obtienes del modelo?.

c) Si ya determinaste que obtendrías del modelo propuesto, ¿ahora que harías para calcular la distancia recorrida?.

En caso necesario consulta a tu asesor de contenido

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Expresa el modelo matemático o ecuación de primer grado de los siguientes problemas, y compara tus resultados con las soluciones que te proporcionamos a continuación de dichos problemas.

1. La suma de tres números enteros consecutivos suman 81. ¿Cuáles son esos números?

2. Tres números enteros pares consecutivos suman 114. Obtener esos números.

3. La edad de Raúl es de dos tercios la edad de su padre. Si la suma de las dos edades es 110, calcula la edad de cada uno.

4. Hace 5 años la edad de Juan era la mitad de la que tendrá dentro de 7 años. ¿Cuál es su edad actual?.

5. ¿Hace cuánto tiempo la edad de Benito era el triple de la de Daniel?. Si actualmente Benito tiene 50 años y Daniel 24.

6. Si debes pagar \$75.00 de una compra que haces en un almacén y tienes 27 monedas de \$1.00 y \$5.00 respectivamente ¿cuántas monedas deberás pagar de \$1.00 y de \$5.00?.

7. Un camión regular parte de A hacia B con una velocidad de 80 km/h. El expreso parte de A hacia B también, con una velocidad de 100 km/h. ¿En cuántas horas alcanzará el expreso al regular y a qué distancia, si el segundo parte una hora antes?.

Respuestas

1) $x + (x + 1) + (x + 2) = 81$
2) $2x + (2x + 2) + (2x + 4) = 114$
3) $\frac{2}{3}x + x = 110$
4) $x - 5 = \frac{x + 7}{2}$
5) $50 - x = 3(24 - x)$
6) $x+5(27-x)=75$
7) $80(x + 1) = 100x$

1.1.2 SOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA POR EL MÉTODO ALGEBRAICO

En el tema anterior aprendiste a obtener los modelos matemáticos de problemas propuestos, ahora es conveniente resolver dichos modelos para obtener la solución de problemas.

A los modelos matemáticos que se obtuvieron en los problemas planteados, se les conoce con el nombre de *ecuaciones de primer grado con una incógnita*.

Una ecuación de la forma $3x - 5 = 19$ es una igualdad cuyos elementos son:

$$\underbrace{\boxed{3x \;-\; 5}}_{\text{primer miembro}} \underbrace{=}_{\text{signo igual}} \underbrace{\boxed{19}}_{\text{segundo miembro}}$$

Cualquiera de sus miembros puede tener más de un término.

La ecuación de primer grado es una igualdad, toda vez que cada miembro está separado por el signo igual (=).

Ahora bien, hallar el valor que hace verdadera a una ecuación de primer grado con una incognita, es obtener la raíz de la ecuación o el conjunto solución de la misma. Para ello es necesario aplicar las propiedades de la igualdad y las propiedades de campo de los números reales. ¿Las recuerdas?.

Propiedades de la igualdad

Sean a, b, c $\in$ R

1. PROPIEDAD REFLEXIVA $a = a$	(PRI)
2. PROPIEDAD SIMÉTRICA si $a = b$ entonces $b = a$	(PSI)
3. PROPIEDAD TRANSITIVA si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$	(PTI)
4. PROPIEDAD DE LA IGUALDAD DE LA SUMA si $a = b$ entonces $a + c = b + c$	(PIS)
5. PROPIEDAD DE LA IGUALDAD DE LA MULTIPLICACIÓN O PRODUCTO si $a = b$ entonces $a * c = b * c$	(PIM)

Propiedades de los números reales

Sean a, b, c $\in$ R

1. PROPIEDAD CONMUTATIVA DE LA SUMA $a + b = b + a$	(PCS)
PROPIEDAD CONMUTATIVA DE LA MULTIPLICACIÓN (PRODUCTO) $ab = ba$	(PCM)
2. PROPIEDAD ASOCIATIVA DE LA SUMA $a + (b + c) = (a + b) + c$	(PAS)
PROPIEDAD ASOCIATIVA DE LA MULTIPLICACIÓN (PRODUCTO) $a (bc) = (ab) c$	(PAM)
3. PROPIEDAD DISTRIBUTIVA $a (b+c) = ab + ac$	(PD)
4. ELEMENTO NEUTRO ADITIVO $a + 0 = a$	(ENA)
ELEMENTO NEUTRO MULTIPLICATIVO $a \bullet 1 = 1$	(ENM)
5. ELEMENTO INVERSO ADITIVO $a + (-a) = 0$	(EIA)
ELEMENTO INVERSO MULTIPLICATIVO $(1/a) (a) = 1$ $(a^{-1}) (a) = 1$	(EIM)

Observa las iniciales a la derecha de cada una de las propiedades enumeradas. Estas son las que se anotarán a la derecha de la ecuación para resolver según se vaya aplicando cada propiedad.

Ecuaciones equivalentes: Es cuando dos o más ecuaciones admiten las mismas soluciones

EJEMPLO:

Observa los siguientes ejemplos:

1.

$3x + 8 = 4x + 6$	(PIS)
$3x + 8 + (-8) = 4x + 6 + (-8)$	(EIA)
$3x + 0 = 4x - 2$	(ENA)
$3x = 4x - 2$	(PIS)
$3x + (-4x) = 4x + (-4x) - 2$	(EIA) y reducción de términos semejantes
$-x = 0 - 2$	(ENA)
$(-x)(-1) = (-2)(-1)$	(PIM)
$x = 2$	

2.

$14y - 5 - 6y = 3y$	reducción de términos semejantes
$8y - 5 = 3y$	(PIS)
$8y - 5 + 5 = 3y + 5$	(EIA)
$8y + 0 = 3y + 5$	(ENA)
$8y = 3y + 5$	(PIS)
$8y + (-3y) = 3y + (-3y) + 5$	(EIA)
$5y = 0 + 5$	(ENA)
$5y = 5$	(PIM)
$(\frac{1}{5})5y = (\frac{1}{5})(5)$	(EIM)
$y = 1$	

3. $\frac{3x}{4} - 35 = 100 - \frac{3x}{5}$ Convertir la siguiente ecuación a una equivalente pero entera, multiplicando ambos lados por el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores 4 y 5 que es el 20.

$20\left(\frac{3}{4}x - 35\right) = \left(100 - \frac{3}{5}x\right)20$	(PIM)
$15x - 700 = 2000 - 12x$	(PD)
$15x + 12x - 700 = 2000 - 12x + 12x$	(PIS) y reducción de términos
$27x - 700 = 2000 + 0$	(EIA)
$27x - 700 = 2000$	(ENA)
$27x - 700 + 700 = 2000 + 700$	(PIS)
$27x + 0 = 2700$	(EIA)
$27x = 2700$	(ENA)
$\frac{1}{27}(27x) = 2700(\frac{1}{27})$	(PIM)
$x = 100$	(EIM)

4.

$2(6 - 9x) - (5 + 3x) = 0$	(PDA)
$12 - 18x - 5 - 3x = 0$	(PCS)
$-18x - 3x + 12 - 5 = 0$	(PC) reducción de términos semejantes
$-21x + 7 = 0$	(PIS)
$-21x + 7 + (-7) = 0 + (-7)$	(EIA)
$-21x + 0 = 0 + (-7)$	(ENA)
$-21x = -7$	(PIM)
$(-21x)(-7)^{-1} = (-7)(-7)^{-1}$	(EIM)
$3x = 1$	(PIM)
$3x(3)^{-1} = (1)(3)^{-1}$	(EIM)
$x = \frac{1}{3}$	

Hasta el momento, con la observación y el análisis que has hecho de los ejemplos; has podido comprender la solución de este tipo de ecuaciones. Sin embargo, pueden presentarse ecuaciones en las cuales intervienen más de una literal, dichas ecuaciones reciben el nombre de ecuaciones literales o fórmulas.

Ecuaciones literales son aquellas en las que los coeficientes y términos independientes se representan con las primeras letras del alfabeto (a, b, c, d,...). Ejemplo:

Fórmula es la expresión de una ley o principio general por medio de símbolos o letras. Dichas expresiones algebraicas o fórmulas son resultados del conocimiento en sus diferentes áreas: Física, Química, Economía, Geometría, etc. Ejemplos: d = vt, A = bh/2. Tanto las ecuaciones literales como las fórmulas se pueden resolver en la misma forma ejemplificada anteriormente.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Resuelve los siguientes ejercicios considerando las propiedades de la igualdad y de los números reales.

a) Sea $\frac{2a-y}{y+2a}=\frac{1}{a}$ resolver para y

$\frac{2a-y}{y+2a}=\frac{1}{a}$, (PIM) $a(y+2a)$

$\frac{a(y+2a)(2a-y)}{y+2a}=\frac{1}{a}a(y+2a)$, (ENM)

$a(2a-y)=y+2a$, (PD)

$2a^2-ay=y+2a$, (PIS)

$2a^2+(-2a^2)-ay=y+2a+(-2a^2)$, (EIA)

$0-ay=y+2a-2a^2$, (ENA)

$-ay=y+2a-2a^2$, (PSI)

$-ay+(-y)=y+(-y)+2a-2a^2$, (EIA)

$-ay+(-y)=0+2a-2a^2$, Se factoriza el 1er miembro

$y(-a-1)=2a-2a^2$, (PIM)

$y(-a-1)(-a-1)^{-1}=(2a-2a^2)(-a-1)^{-1}$ (EIM)

$y=\frac{2a-2a^2}{-a-1}$ (Se cambian signos de los terminos)

$y=\frac{2a^2-2a}{1+a}$

b) Sea $M = \frac{L}{F}(\frac{25}{f} + 1)$ resolver para f:

$$M = \frac{L}{F}\left(\frac{25}{f} + 1\right) \qquad \text{(PIM)}$$

$$FM = \frac{FL}{F}(\frac{25}{f} + 1) \qquad \text{(ENM)}$$

$$FM = L(\frac{25}{f} + 1) \qquad \text{(PD)}$$

$$FM = \frac{25L}{f} + L \qquad \text{(PIS)}$$

$$FM + (-L) = \frac{25L}{f} + L + (-L) \qquad \text{(EIA)}$$

$$FM - L = \frac{25L}{f} + 0 \qquad \text{(ENA)}$$

$$FM - L = \frac{25L}{f} \qquad \text{(PIM)}$$

$$f(FM - L) = \left(\frac{25L}{f}\right)f \qquad \text{(ENM)}$$

$$f(FM - L) = 25L \qquad \text{(PIM)}$$

$$\frac{f(FM - L)}{(FM - L)} = \frac{25L}{(FM - L)} \qquad \text{(ENM)}$$

$$f = \frac{25L}{(FM - L)}$$

Para hallar la solución de la ecuación por el método algebraico se aplican las propiedades de campo y las de la igualdad para dejar la incógnita en un solo miembro y con coeficiente igual a la unidad.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Una vez que hallas comprendido estos procedimientos , procura considerarlos en la solución de los siguientes ejercicios.

I. Aplicando las propiedades de campo de los números reales y de la igualdad resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $5x + 2 = 3x + 10$

2. $2x + 3 - 7x = -6x + 2x - 12$

3. $5(x - 2) + 6 = -3(x + 8) - 2$

4. $6 - 7(2x + 4) = x - 2(5x - 3)$

5. $7(x - 2) - 4(x + 4) + 6 = 0$

6. $4(3z + 5) + 5z + 3 = 5(z + 1) + 8$

7. $\frac{x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{3} = \frac{x}{6} + \frac{2}{3}$

8. $2\left(\frac{2}{8} + \frac{1}{4}\right) - 3\left(\frac{2}{9} + \frac{x}{18}\right) - \frac{x}{2} - \frac{1}{3} = 0$

9. $\frac{4z}{9} - \frac{z}{8} - \frac{25}{72} = \frac{-z}{6} + \frac{1}{18} - \frac{1}{8}$

10. $2(6x - 32) - 32(x - 1) + 92x = 0$

11. $-2(x - 6) + (32x + 5) - 2x - 5 = 0$

II. Aplicando las fórmulas o expresiones algebraicas propuestas, resuelve o despeja la variable que se propone

1. $v = \frac{bh}{3}$, resolver para h

2. $p = \frac{w}{t}$, resolver para t

3. $s = vt + \frac{at}{2}$, resolver para t

4. $L_2 = L_1(1+t)$, resolver para t

5. $v = \frac{1}{hc}(E_1 - E_2)$, resolver para c

6. $p = \frac{fv}{v-s}$, resolver para v y s

7. $s = \frac{Lr - a}{r - 1}$, resolver para r.

¿Qué es un plano cartesiano?

1.1.3 SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO Y SU INTERPRETACIÓN GRÁFICA

Hasta aquí has aprendido a obtener la solución de una ecuación de primer grado con una incógnita aplicando las propiedades de campo y de la igualdad. Sin embargo, existe otro método que se conoce como *método gráfico* que consiste en la representación gráfica de una ecuación de primer grado con dos incógnitas en el plano cartesiano.

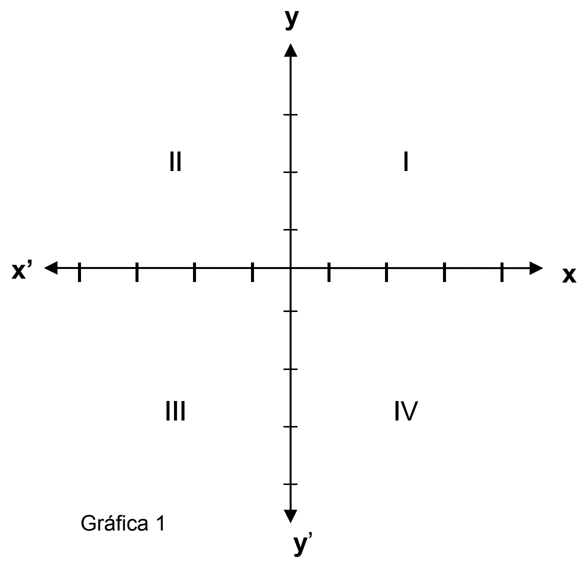
Conviene recordar en qué consiste el plano cartesiano y después obtener la gráfica correspondiente.

En la primera unidad se estudió el conjunto de lo números reales y su correspondiente recta *real*, en la que cada punto de esta le corresponde un número real y sólo uno.

El plano cartesiano es aquel que contienen dos rectas numéricas perpendiculares (forman ángulos de 90°) que se intersectan en un punto llamado *origen*, considerando horizontal una de las rectas y consecuentemente vertical a la otra, a los valores considerados sobre la recta (o eje) horizontal se les llama abscisas y en general se les representa con "x". Del origen a la derecha los valores son positivos y del origen a la izquierda, negativos. A los valores considerados sobre la recta (o eje) vertical se les llama ordenadas y en general se representan con "y". Del origen hacia arriba los valores son positivos y del origen hacia abajo, negativos. Al par de valores (x, y), en este orden, se les llama coordenadas. Dichas coordenadas sirven para ubicar o localizar puntos sobre el plano cartesiano. Por lo tanto, un punto cualquiera ubicado en el plano cartesiano es la representación geométrica de un par ordenado P(x,y).

Por último, las rectas mencionadas generan en el plano cuatro regiones llamadas cuadrantes. A partir de la región comprendida entre las dos semirectas de valores positivos se numeran los cuadrantes en sentido contrario a las manecillas del reloj.

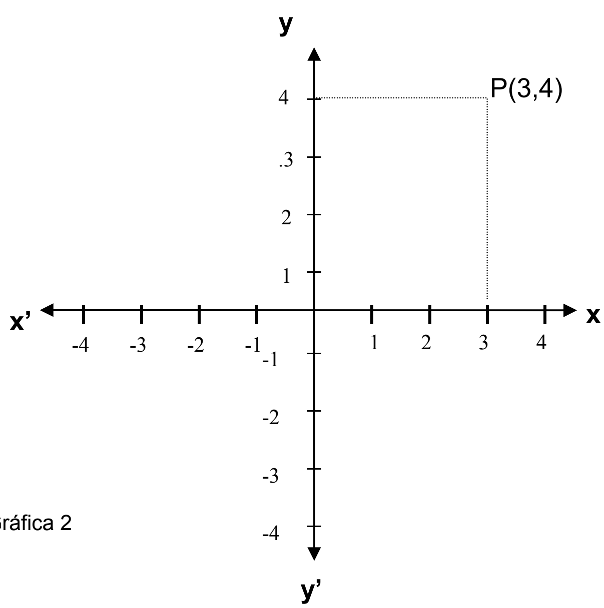
En la gráfica 1 se tienen dos rectas perpendiculares que se cortan a 90° ; a la recta horizontal se le llama eje se las abscisas (xx') y a la recta vertical se le llama eje de las ordenadas (yy') .



Gráfica 1

Un punto del plano cartesiano se localiza ubicado sobre los ejes xx', yy' los puntos correspondientes a los valores ordenados dados (x, y). Según la Gráfica 1, ¿dónde localizas el punto (2,3)?. Recuerda que el primer número siempre representa a las abscisas.

Para localizar un punto en el plano cartesiano a partir de un par de valores, por ejemplo (3,4), se localiza la abscisa 3 y la ordenada 4, y se trazan líneas paralelas a cada uno de los ejes; la intersección de éstas es el punto P(3, 4), como muestra la Gráfica 2.



Gráfica 2

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Realiza los ejercicios considerando lo que ya revisaste.

A) De acuerdo con lo propuesto y a las figuras que se muestran:

a) ¿Cuál es el signo de las abscisas y de las ordenadas en el primer cuadrante?.

b) ¿Y en el resto de los cuadrantes?.

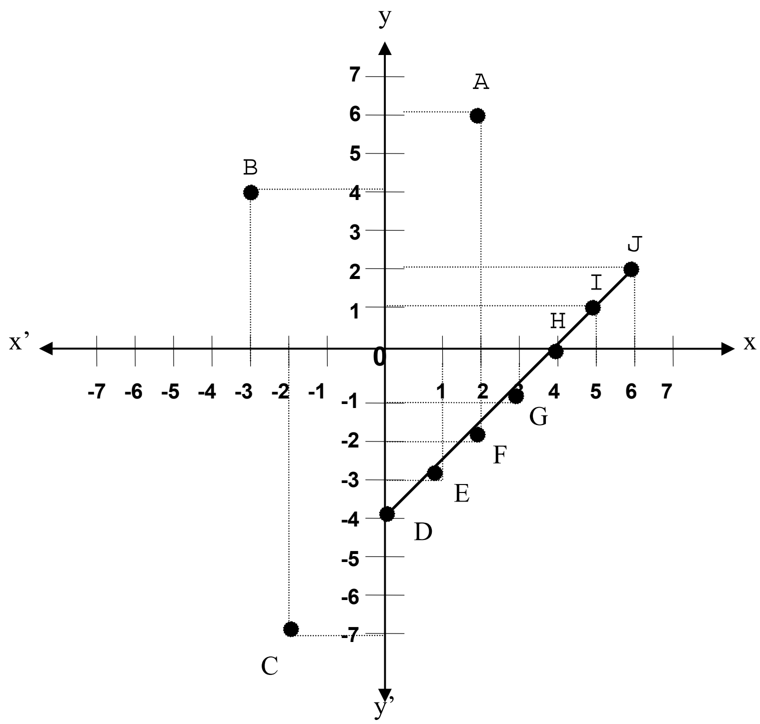
c) Expresa los signos de esas coordenadas en un paréntesis.

Ejemplo: cuadrante I (+, +).

B) En el plano cartesiano localiza los puntos:

1. A(2, 6)
2. B(-3, 4)
3. C(-2, -7)
4. D(0, -4)
5. E(1, -3)
6. F(2, -2)
7. G(3,-1)
8. H(4, 0)
9. I(5, 1)
10. J(6, 2)

Como una forma de verificar lo que has aprendido cómo localizar los puntos en el plano cartesiano, dados sus pares de valores reales ordenados correspondientes, debiste obtener la siguiente gráfica.



Gráfica 3

En ella se puede observar que los pares de valores de los ejercicios 4 al 10 se encuentran ubicados en línea recta. Observa atentamente el punto H(4, 0).

Ahora veamos como sería su análisis.

De la correspondencia $(x, y) \longrightarrow (4, 0)$ se obtienen dos ecuaciones de estos valores ordenados:

$$x = 4 \qquad (1)$$

$$y = 0 \qquad (2)$$

La ecuación 1 se iguala a 0, resultando de esta manera una tercera ecuación :

$$x - 4 = 0 \qquad (3)$$

Aplicando la PTI a las ecuaciones 2 y 3 obtenemos una cuarta ecuación:

$$y = x - 4 \tag{4}$$

Retomando estos datos resuelve la ecuación siguiente:

$$2x - 5 = 3 \tag{5}$$

donde "x" se sustituye por el valor de la ecuación 1.

Aplicando las propiedades de campo de los números reales y de la igualdad el resultado es:

$$x = 4 \tag{6}$$

En esta última ecuación nuevamente se iguala a cero y se obtiene:

$$x - 4 = 0 \tag{7}$$

y aplicando la PTI a las ecuaciones 2 y 7 se tiene:

$$y = x - 4 \tag{8}$$

Observa que es la misma que (4), y que por lo tanto la solución gráfica de la ecuación $2x - 5 = 3$ es $x = 4$ y que corresponde al punto (4,0)

Ahora hagamos un paréntesis para recordar:

Si a $\in$ R, entonces: a < 0, a = 0, o a > 0
Si a = x, entonces: x $\in$R, y x < 0, x = 0, ó x > 0

Por último se puede interpretar que sobre el eje horizontal de las abscisas los valores de "x" pueden ser "varios" o "pueden variar", y por lo tanto, se puede proponer que "x" es una "variable".

Con base en lo anterior y conociendo el cálculo numérico de expresiones algebraicas, si asignamos valores a "x" se pueden obtener los valores de "y" en $y = x - 4$.

Observa la tabla siguiente:

x	0	1	2	3	4	5	6
	-4	-3	-2	-1	0	1	2
PUNTOS	D	E	F	G	H	I	J

De este modo, si a la variable “x” se le asignan valores se obtiene la correspondiente a “y” a través de una función con dos literales, a la primera le llamaremos variable independiente (x) y a la segunda variable dependiente (y).
Localizar la posición de un punto en el sistema cartesiano resulta sencillo, pues bastará con encontrar, sobre los ejes respectivos, los valores que corresponden a las abscisas y a las ordenadas, para trazar desde esos puntos rectas perpendiculares a cada eje. El punto de intersección de las rectas, así trazadas nos definen la posición del punto propuesto.

¿Que podemos concluir de lo antes expuesto?

Nuestra conclusión es que la ecuación de primer grado se puede graficar en el plano cartesiano y su figura es una línea recta; la solución en esa gráfica se obtiene en la abscisa “x” del punto de intersección de la recta con el eje horizontal. Así mismo, que a la “x” se le da el nombre de variable independiente por los valores que se le pueden asignar dentro de los reales y que la variable dependiente corresponde a “y”, puesto que su valor se determina por los valores de “x”.

Ejemplo:

Observa la siguiente ecuación

$$\frac{x}{2}-\frac{2}{3}=\frac{3x}{4}+\frac{1}{12}$$

$$\frac{x}{2}-\frac{2}{3}=\frac{3x}{4}+\frac{1}{12}, \qquad \text{PIS } \frac{3x}{4}$$

$$\frac{x}{2}-\frac{2}{3}-\frac{3x}{4}=\frac{3x}{4}-\frac{3x}{4}+\frac{1}{12} \qquad \text{EIA}$$

$$\frac{x}{2}-\frac{2}{3}-\frac{3x}{4}=0+\frac{1}{12} \qquad \text{(ENA)}$$

$$\frac{x}{2}-\frac{2}{3}-\frac{3x}{4}=\frac{1}{12} \qquad \text{(PIM)}$$

$$12(\frac{x}{2}-\frac{2}{3}-\frac{3x}{4})=12(\frac{1}{12}) \qquad \text{(EIM)}$$

$$12(\frac{x}{2}-\frac{2}{3}-\frac{3x}{4})=1, \qquad \text{PD}$$

$$\frac{12x}{2}-\frac{24}{3}-\frac{36x}{4}=1 \qquad \text{(se realizan los cocientes)}$$

$$6x-8-9x=1 \qquad \text{(se reducen términos semejantes)}$$

$$-3x-8=1 \qquad \text{(PIS)}$$

$$-3x-8+8=1+8 \qquad \text{(EIA)}$$

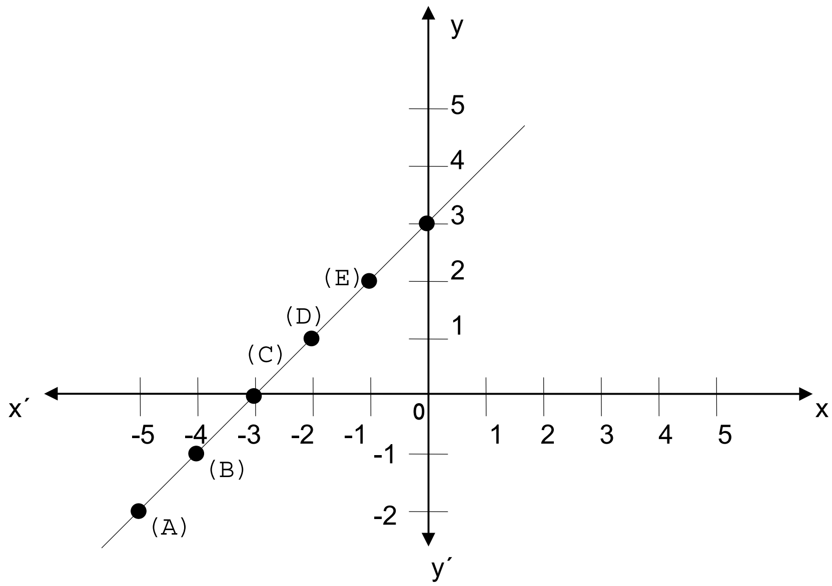
$$-3x+0=1+8 \qquad \text{(ENA)}$$

$$-3x=9 \qquad \text{(PIM)}$$

$$(-3x)(-3)^{-1}=9(-3)^{-1} \qquad \text{(EIM)}$$

$$x=-3$$

Ahora comprobar gráficamente la misma ecuación:



Gráfica 4

1) De la solución $x = -3$ se tiene $x + 3 = 0$ por lo planteado anteriormente, $y = x + 3$.

2) Se construye la tabla de valores:

x	-5	-4	-3	-2	-1
$y = x + 3$	-2	-1	0	1	2
PUNTOS	A	B	C	D	E

$x_1 = -5, \quad y_1 = -5 + 3 = -2$

$x_2 = -4, \quad y_2 = -4 + 3 = -1$

$x_3 = -3, \quad y_3 = -3 + 3 = 0$

$x_4 = -2, \quad y_4 = -2 + 3 = 1$

$x_5 = -1, \quad y_5 = -1 + 3 = 2$

Nuevamente observa que la línea recta y=x+3, intersecta al eje horizontal xx' en el punto (-3, 0) entonces, la solución de la ecuación $\frac{x}{2} - \frac{2}{3} = \frac{3x}{4} + \frac{1}{12}$

es $x = -3$

Comprobación:

$$\frac{-3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{3(-3)}{4} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{-3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{-9}{4} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{-9 - 4}{6} = \frac{-27 + 1}{12}$$

$$\frac{-13}{6} = \frac{-26}{12}$$

$$\frac{-13}{6} = \frac{-13}{6}$$

Analiza el siguiente problema: En el Valle de la Muerte que se ubica en California, las temperaturas en el día y en la noche son de 145° F y -70° F ¿a cuántos grados centígrados corresponden estas temperaturas?

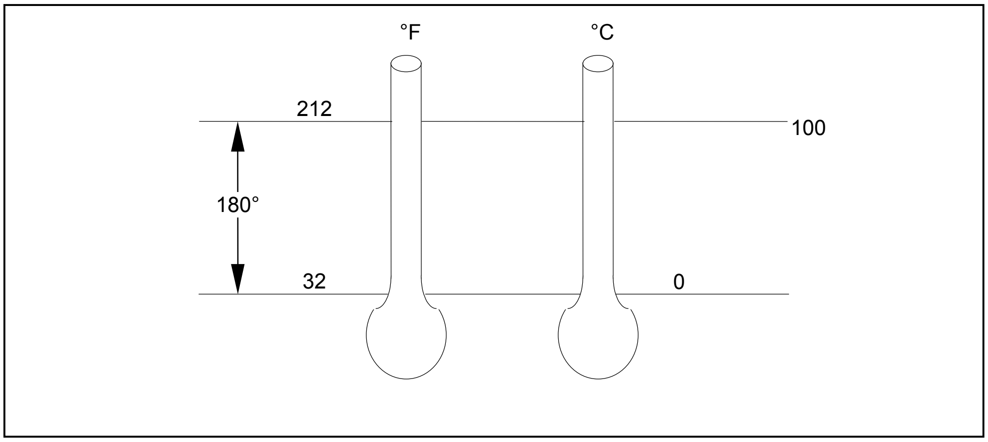


Figura 3

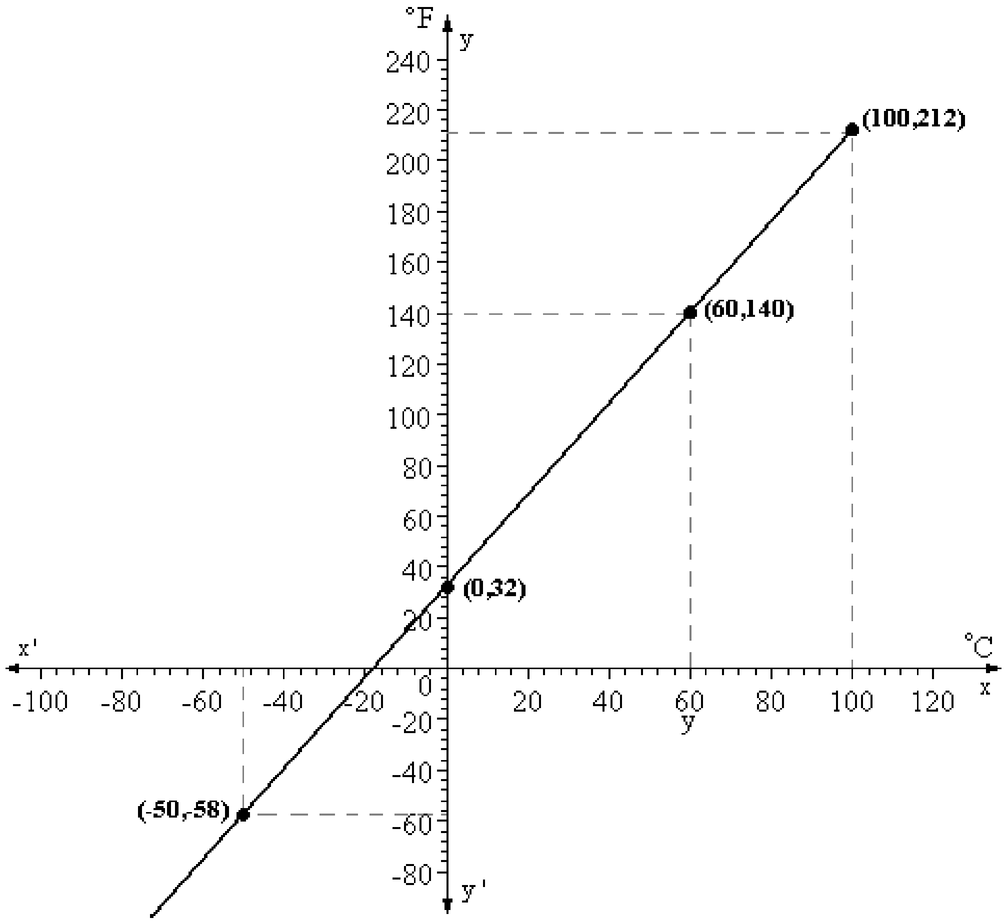
Para resolver este problema recuerda que las divisiones de las escalas termométricas son proporcionales (figura 3), lo cual nos permite establecer la siguiente proporción.

$$\frac{180}{100} = \frac{°F - 32}{°C} \qquad (1)$$

De esta ecuación se obtiene:

$$°F = \frac{9}{5}°C + 32 \qquad (2)$$

Si graficamos la ecuación (2) obtenemos la recta de la gráfica 5.



Gráfica 5

* Para dar respuesta al problema anterior, se deben trazar perpendiculares por los puntos conocidos de las escalas Farenheit hasta tocar la recta, y en un punto trazar una perpendicular al eje °C; en este punto se halla el valor en °C equivalente a grados °F.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Realiza lo siguiente:

a) La temperatura normal del cuerpo humano es de 36 °C. ¿A cuánto equivale en grados °F?.

b) En la cuidad de México se han registrado temperaturas hasta de -10 °C que han causado la muerte de algunos indigentes. ¿A cuántos °F corresponde esta temperatura?.

¿Observas alguna ventaja al utilizar el método gráfico?.

En este ejemplo se puede concluir que el método gráfico tiene sus ventajas, pues una vez que hemos trazado la gráfica podemos hallar todos los valores que nos interesan con el simple hecho de trazar perpendiculares a los ejes hasta tocar la recta, sin tener que realizar ninguna operación.

Veamos ahora la solución de la ecuación:

$$2\left(\frac{x}{10}-\frac{2}{14}\right)-3\left(\frac{x}{21}-\frac{3}{105}\right)=0$$

por el método gráfico.

Por el método algebraico de la ecuación propuesta se llega a $2x-7=0$. De manera que $y=2x-7$.

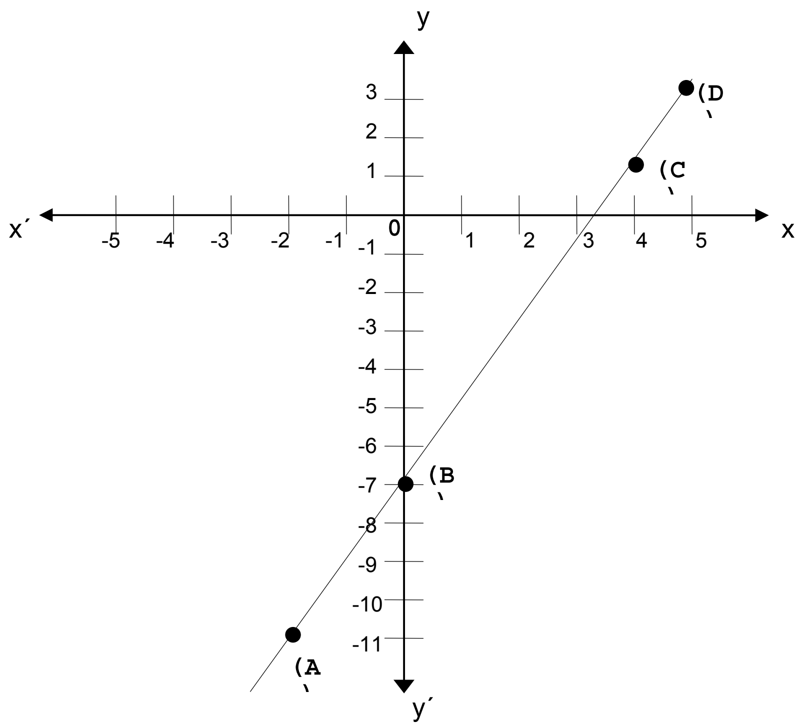
Ahora obteniendo la tabla de valores correspondiente:

p	x	y	(x, y)
A	-2	-11	(-2, -11)
B	0	-7	(0, -7)
C	4	1	(4, 1)
D	5	3	(5, 3)

Porque $x_1=-2$,

$$y_1=2(-2)-7$$
$$y_1=-4-7$$
$$y_1=-11$$

Una vez que se ubican los puntos correspondientes a las parejas de valores se tiene la gráfica de la figura 6.



Gráfica 6

La recta corta el eje horizontal (xx’) en el punto P(7/2, 0). El valor de la abscisa es x = 7/2; observa que se lee en forma aproximada, lo cual representa una desventaja. Únicamente nos queda verificar si ese valor corresponde a la ecuación dada.

Comprobación:

$$y = 2x - 7$$

$$y = \frac{2(7)}{2} - 7 = 7 - 7 = 0\ .$$

En este caso el valor “observado” fue el correcto.

Como puedes concluir, este método presenta las siguientes desventajas:

a) Es muy laborioso

b) Cuando la recta corta al eje horizontal (xx’) en un punto intermedio, entre dos valores enteros consecutivos, el valor que se obtiene para “x” es aproximado.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Comprueba lo que has aprendido, resolviendo los siguientes ejercicios:

I. Lee cuidadosamente la pregunta, realiza las operaciones necesarias y selecciona la respuesta correcta llenando el espacio inferior de la letra correspondiente.

1. ¿Cuál de los siguientes conjuntos de parejas ordenadas corresponde a la recta de la gráfica 7?.

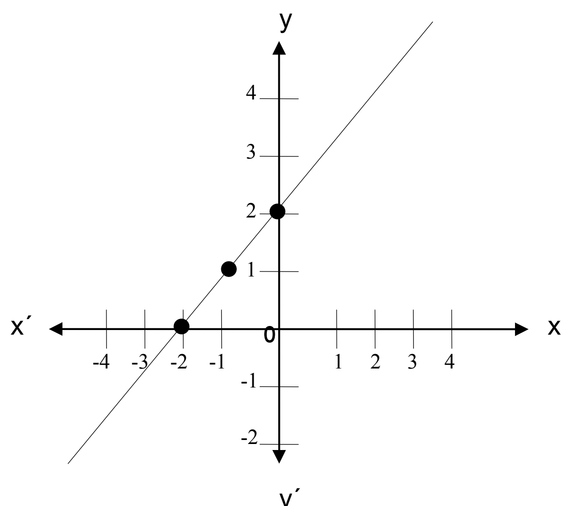
a) {(-3, -1), (0, 1), (-2, 0)}

b) {(1, 3), (-1, -1), (0, 2)}

c) {(2, 4), (0, 2), (-1, -1)}

d) {(-2, 0), (-1, 1), (0, 2)}

☐ a ☐ b ☐ c ☐ d



Gráfica 7

2. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a la recta que se indica en la gráfica 8?.

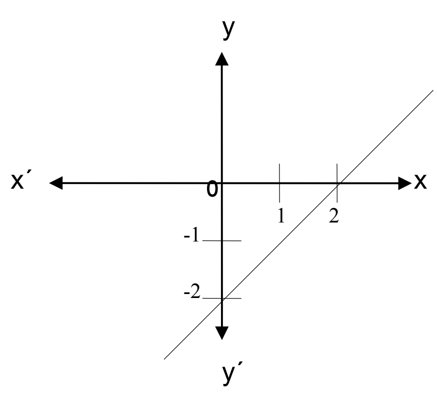
a) $2x - 3 = 0$

b) $-5x + 2 = 0$

c) $4x - 5 = 0$

d) $-3x + 6 = 0$

☐ a ☐ b ☐ c ☐ d



Gráfica 8

3. ¿Cuál es la raíz de la ecuación cuya gráfica se indica en la gráfica 9?.

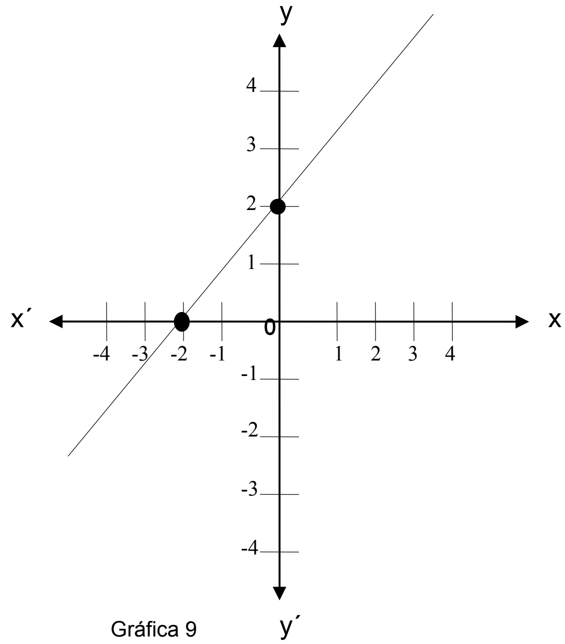
a) {-2}

b) {2}

c) {0,2}

d) {2, 0}

☐ a ☐ b ☐ c ☐ d



Gráfica 9

4. ¿Cuál de los siguientes valores es la raíz de la ecuación cuya recta se indica en la gráfica 10?.

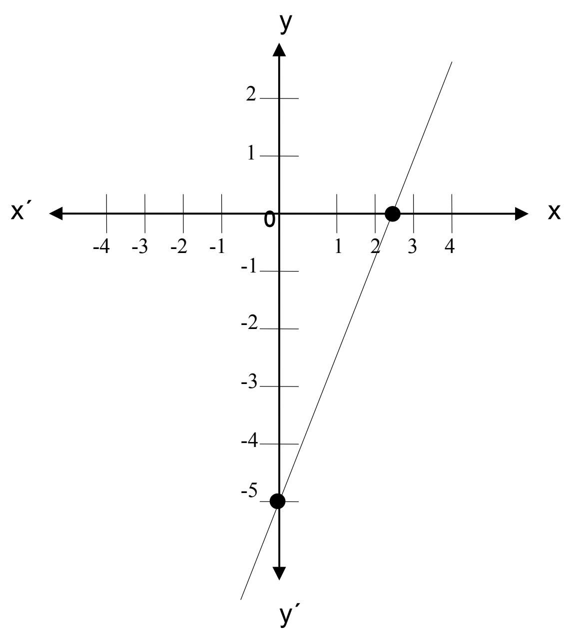
a) {0, 5/2}

b) {-5/2, 0}

c) {5/2}

d) {-5/2}

☐ a ☐ b ☐ c ☐ d



Gráfica 10

5. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones no tiene la solución que muestra la gráfica 11?.

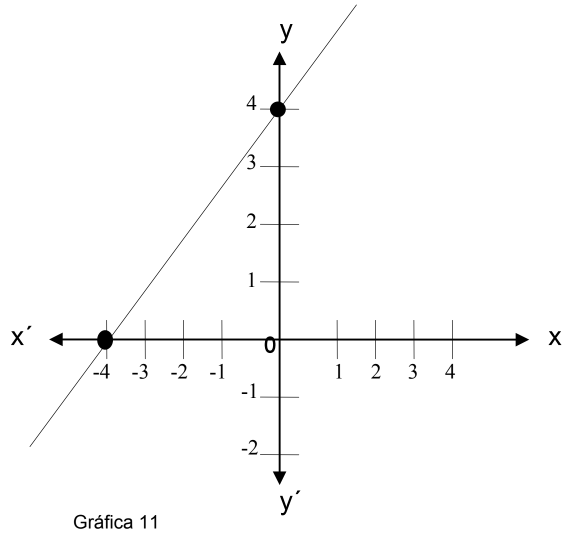
a) $5x + 20 = 0$

b) $x - 3 = 2x + 1$

c) $x + 6 = 2$

d) $3 - 5x = -5$

☐ a ☐ b ☐ c ☐ d



Gráfica 11

II. Siguiendo el proceso establecido en los ejemplos anteriores, obtener la solución de las siguientes ecuaciones por el método gráfico.

1. $4x - 9 = 4$
2. $9x + 16 = 3x + 4$
3. $3(2x - 5) - 2(3x + 7) = 5$
4. $\frac{3x+5}{4} - \frac{2x-3}{3} = 3$
5. $4(\frac{3x}{4} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(4x + 12) = 4$
6. $3(3x - 1) + 4(9 - 5x) = 0$

1.1.4 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE DAN LUGAR AL PLANTEAMIENTO DE UNA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

En los dos primeros subtemas se planteó cómo se expresa un problema en lenguaje simbólico (algebraico), expresión que es el modelo matemático; éste a su vez, es una ecuación con una incógnita de primer grado a la cual dimos solución. Ahora estudiaremos el problema en su totalidad, integrando esas dos actividades. ¿Recuerdas el problema de los vendedores?.

1) Dos vendedores, A y B viven en diferentes ciudades, pero por razones de trabajo deben encontrarse en una ciudad que está entre las dos primeras; las tres ciudades se localizan en una misma recta. La dinstancia entre las dos cuidadas de donde parten en automóvil es de 640 km. Si A viaja a 70 km/h, y B a 90km/h a que distancia de donde parte A se encuentra la ciudad en la que deben reunirse y en cuántas horas llegarán, si parten al mismo tiempo?.

Fórmula: d = vt.
Incógnitas: t y d
Distancias: $d_A = 70t$, $d_B = 90t$

Por las condiciones del problema: 70t + 90t = 640.

Resolución

$$
\begin{array}{ll}
70t + 90t = 640 & \\
160t = 640 & \text{PIM} \\
160(160)^{-1}t = 640(160)^{-1} & \text{EIM} \\
t = \dfrac{640}{160} & \\
t = 4 &
\end{array}
$$

El tiempo que les lleva desplazarse a cada uno de los vendedores hasta el lugar de reunión es de 4 horas.

Como el vendedor A viaja a v_A = 70 km/h, entonces d_A 70 km/h x 4 h = 280 km.
Distancia que recorre d_B = 90 km/h. x 4 h = 360 km.
Distancia que recorre d_A = 70 km/h. x 4 h = 280 km.

De esta manera queda resuelto el problema; sin embargo, es necesario tener la certeza de que el resultado es verdadero. Como la ecuación de primer grado es una proposición abierta que solo es verdadera para ciertos valores (igualdad), entonces la ecuación debe comprobarse.

$$
\begin{aligned}
&70t + 90t = 640 \\
&70(4) + 90(4) = 640 \\
&280 + 360 = 640
\end{aligned}
$$

Si analizas todo el proceso de resolución del problema anterior , comprobarás que presenta tres fases en general.

a) *Obtención del método matemático* o transformación de la proposición lógica planteada (lenguaje cotidiano a una proposición abierta (lenguaje algebraico) o ecuación de primer grado.

b) *Resolución* de la ecuación de primer grado

c) *Comprobación*. En caso de que no cumpla ésta se procede a hacer una revisión general donde se detectará el error u omisión.

2) Tres obreros producen 100 piezas por turno. Si el obrero B produce el doble de piezas que produce A menos cinco, y el obrero C produce dos tercios de lo que produce B. ¿Cuántas piezas produce cada uno?

a) Elaboración del modelo

Número de piezas que produce A: x

Número de piezas que produce B: $2x - 5$

Número de piezas que produce C: $\frac{2(2x-5)}{3}$

b) Solución

$$x + (2x-5) + \frac{2(2x-5)}{3} = 100,$$

$3\left[x + (2x-5) + \frac{2(2x-5)}{3}\right] = 3(100)$	(PIM) (3)
$3x + 3(2x-5) + 2(2x-5) = 300$	(PD)
$3x + 6x - 15 + 4x - 10 = 300$	REDUCCION DE TÉRMINOS
$13x - 25 = 300$	(PIS) (+25)
$13x - 25 + 25 = 300 + 25$	(EIA)
$13x + 0 = 300 + 25$	(ENA
$13x = 300 + 25$	REDUCCION DE TÉRMINOS
$13x = 325$	(PIM)
$13(13)^{-1}x = 325(13)^{-1}$	(EIM) $(13)^{-1}$
$x = \frac{325}{13}$	DIVISIÓN DE DOS ENTEROS
$x = 25.$	SOLUCIÓN

Número de piezas que produce A: x = 25

Número de piezas que produce B: 2x - 5 = 2(25) - 5 = 45

Número de piezas que produce C: $\frac{2(2x-5)}{3} = \frac{2[2(25)-5]}{3} = 30$

c) Comprobación

$$25 + 45 + 30 = 100$$
$$100 = 100$$

Como se puede notar en la comprobación, solamente existe un valor que hace verdadera a la ecuación, cualquier otro valor la hace falsa; probemos con los siguientes valores para la ecuación:

$$x + (2x - 5) + \frac{2(2x - 5)}{3} = 100$$

Para x = 20 obtenemos:

$$20 + [2(20) - 5] + 2\frac{[2(20) - 5]}{3} = 100$$
$$20 + 35 + \frac{70}{3} = 100$$
$$\frac{235}{3} \neq 100$$

Con esto se concluye que sólo para x=30 cumple la igualdad.

Cabe aclarar que existen otros tipos de igualdades que son verdaderas para cualquier valor de la variable como la siguiente:

$$3(2x - 4) = 6x - 12$$

Probemos para $x = 2$,

$$3[2(2) - 4] = 6(2) - 12$$
$$3(0) = 12 - 12$$
$$0 = 0$$

Para $x = 5$,

$$3\left[2(5) - 4\right] = 6(5) - 12$$
$$3(10 - 4) = 30 - 12$$
$$18 = 18,$$ etcétera.

A este tipo de igualdades se les llama identidades.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Contesta las siguientes preguntas:

1. En el problema de los obreros se tomo como referencia la producción de A (x), y entonces la producción de B fue $2x-5$ según el problema.

a) Si se hubiera considerado la producción de B como "x", ¿cómo expresarías la producción de A?.

b) ¿Y la de C?.

2. La edad de Juan es el triple de la de Pedro, y hace cinco años la edad de Pedro era un quinto de la de Juan. ¿Que edad tiene actualmente Juan y Pedro?

Edad actual de Juan: $3x$ hace cinco años: $3x-5$
Edad actual de Pedro: x, hace cinco años: $x-5$
Hace cinco años la edad de Pedro era un quinto de la de Juan.

$$x-5=\frac{3x-5}{5}$$

$x-5=\frac{3x-5}{5}$,	PIM (5)
$5(x-5)=5\frac{3x-5}{5}$,	EIM
$5(x-5)=3x-5$,	PD
$5x-25=3x-5$,	PIS (+25)
$5x-25+25=3x-5+25$,	EIA
$5x+0=3x-5+25$,	ENA
$5x=3x-5+25$,	Reducción de términos
$5x=3x+20$,	PIS (-3x)
$5x-3x=3x-3x+20$,	EIA
$5x-3x=0+20$	ENA
$5x-3x=20$	Reducción de términos
$2x=20$	PIM $(2)^{-1}$
$2(2)^{-1}x=20(2)^{-1}$,	EIM
$x=\frac{20}{2}$,	División de dos enteros
$x=10.$	Solución

Edad actual de Pedro: $x = 10$ años
Edad actual de Juan: $3x = 3(10) = 30$ años

Comprobación

$$10 - 5 = \frac{3(10) - 5}{5}$$
$$5 = \frac{30 - 5}{5}$$
$$5 = \frac{25}{5}$$
$$5 = 5$$

3. De dos soluciones de ácido de diferente concentración se pretende obtener otra solución. Los componentes de la primera están en relación uno a uno de ácido y agua, y en la segunda cuatro a uno, también de ácido y agua. Si se necesitan 15 litros de la nueva solución, cuya relación debe ser tres a uno, ¿cuántos litros se necesitan de cada una de las dos primeras soluciones?.

Incógnitas: se desconoce la cantidad en litros de las dos primeras soluciones.

Datos: se conocen las relaciones de ácido y agua de las tres soluciones y el número de litros de la solución que se desea obtener.

Cantidad en litros de la primera solución: x
Cantidad en litros de la segunda solución: $15 - x$
Relación de los componentes de la primera solución: $1/1 = 1$
Relación de los componentes de la segunda solución: $4/1 = 4$
Relación de los componentes de la solución por obtener: $3/1 = 3$

Por lo tanto:

$1x + 4(15 - x) = 3(15),$	Producto de dos enteros
$x + 4(15 - x) = 45,$	(PD)
$x + 60 - 4x = 45,$	Reducción de términos semejantes
$-3x + 60 = 45,$	PIS (-60)
$-3x + 60 - 60 = 45 - 60,$	EIA
$-3x + 0 = -15,$	ENA
$-3x = -15,$	PIM $(-3)^{-1}$
$-3(-3)^{-1}x = -15(-3)^{-1},$	EIM
$x = \frac{-15}{-3},$	División de dos enteros
$x = 5,$	Solución

Cantidad en litros de la primera solución : x = 5
Cantidad en litros de la segunda solución: 15 - x = 15 - 5 = 10

Comprobación

$$1(5) + 4(15 - 5) = 3(15)$$
$$5 + 4(15 - 5) = 45$$
$$5 + 4(10) = 45$$
$$5 + 40 = 45$$
$$45 = 45$$

1) Una persona deposita en cuenta de ahorros, un capital por el que se le paga el 12% de intereses. Acuerda con el Banco hacer otro depósito que es mayor en \$500,000 al capital inicial y por el que se le pagará el 15% de intereses.

¿Cuál fue el depósito total, si al cabo de un año recibió en total \$1,680,000?

En este caso se emplea la fórmula:

$$C = c + ct\frac{r}{100}$$

C monto total
c capital inicial ya que “t” = 1 por ser un año
t es el tiempo en años
r es el interés

Incógnita: c = capital inicial, depositado al 12%.
c + 500,000 = capital inicial incrementado, depositado al 15%.
Así que: al final del año, el monto total del capital inicial:

$$C_1 = c + c\frac{12}{100}$$

y el monto total del segundo depósito que es el capital inicial más \$500,000 es:

$$C_2 = (c + 500{,}000) + (c + 500{,}000)\frac{15}{100}$$

Así que el monto total C de los dos capitales al final del año será:

$$C = C_1 + C_2$$

$$c + \frac{12c}{100} + (c + 500{,}000) + \frac{15\left(c + 500{,}000\right)}{100})$$

$$c + \frac{12c}{100} + c + 500{,}000 + \frac{15(c + 500{,}000)}{100} = 1{,}680{,}000$$

$$2c + \frac{12c}{100} + 500{,}000 + \frac{15c + 7{,}500{,}000}{100} = 1{,}680{,}000$$

$$2c + 500{,}000 + \frac{12c + 15c + 7{,}500{,}000}{100} = 1{,}680{,}000$$

$$2c + 500{,}000 + \frac{27c + 7{,}500{,}000}{100} = 1{,}680{,}000$$

$$200c + 50{,}000{,}000 + 27c + 7{,}500{,}000 = 168{,}000{,}000$$

$$227c + 57{,}500{,}000 = 168{,}000{,}000$$

$$227c = 168{,}000{,}000 - 57{,}500{,}000$$

$$227c = 110{,}500{,}000$$

$$c = \frac{110{,}500{,}000}{227}$$

$$c = 486{,}784.14$$

El depósito total es:

$$c + (c + 500{,}000) = 486{,}784.14 + (486{,}784.14 + 500{,}000) = 1{,}473{,}568.28$$

Observa que en los ejemplos 1 y 4 se usaron subíndices que son los números o letras pequeños anotados abajo a la derecha de la literal respectiva. Esto es con el fin de hacer la diferenciación correspondiente; así, en el primer problema d_A se debe interpretar como la distancia que recorre el vendedor A. En el caso del ejemplo 4, C_1 debe entenderse como el monto del primer capital depositado, etcétera.

Algunos ejemplos de problemas que dan lugar a ecuaciones de primer grado, se trataron con dos o más incógnitas. ¿Consideras que se podrían plantear como ecuaciones con dos incógnitas de primer grado?. ¿Por qué?.

Recuerda que el método gráfico es otra forma de conocer el valor de la incógnita y para ello la secuencia de operaciones es:

-Mediante la aplicación de las propiedades se iguala a cero la ecuación $ax + b = 0$.

-Se sustituye el cero por la variable “y”.

-Se elabora una tabla de valores y para ello se asignan valores a la variable “x”, obteniendo para cada valor de “x”, un valor de “y”. este par de valores forman la pareja ordenada (x, y).

-Por la forma en que se obtienen los valores de las parejas ordenadas, a “x” se le llama variable independiente y a “y” variable dependiente. A la “x” también se le llama abscisa y a la “y”, ordenada.

-Cada pareja ordenada se llama coordenada y representa un punto en el plano cartesiano.

Observa y analiza el procedimiento utilizado para resolver los problemas anteriores. Con los conocimientos que has adquirido y con el apoyo de tu asesor resuelve los siguientes problemas dando tanto una solución algebraica como gráfica.

1. Dos viajeros se desplazan en su automovil a partir de los pueblos A y B respectivamente, la distancia entre éstos es de 100 km en línea recta. Ambos parten a la misma hora; el que parte de A viaja a 90 km/h y el de B a 70 km/h.

   Considerando que B se localiza a la derecha de A y que los viajeros se desplazan en la misma dirección y sentido. ¿A que distancia de A el viajero que parte de este pueblo alcanzará al que parte de B?.

2. El patio de carga y descarga de una fábrica es de forma rectangular, si se tiene que cercar tres de sus lados (se excluye uno de los lados mayores) y el largo es 10 m mayor que el triple de ancho. ¿Cuáles son las dimensiones del largo y ancho, si se necesitan 110 m de malla de alambre?.

EXPLICACIÓN INTEGRADORA

Hasta aquí se estudió el tema de ecuaciones de primer grado, donde se analizó el proceso de solución, por medio del método algebraico y su interpretación gráfica, así mismo se plantearon problemas para establecer modelos matemáticos que se le conoce como ecuación.

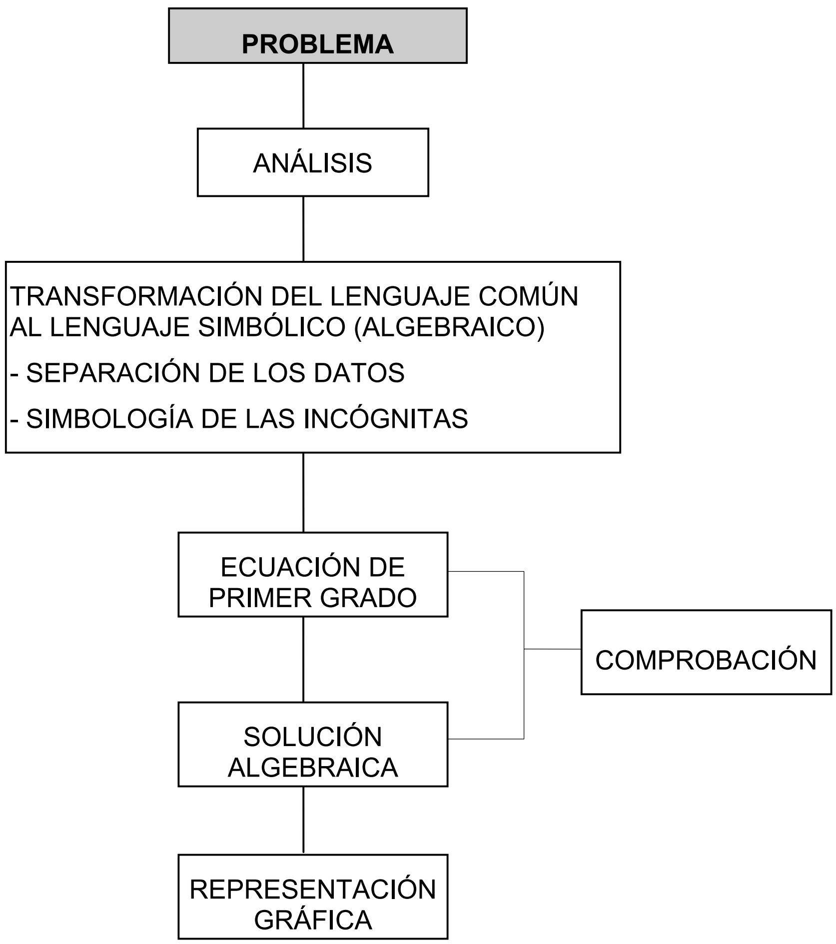
Así por ejemplo:

PROCEDIMIENTO

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	MODELO MATEMÁTICO ECUACIÓN DE PRIMER GRADO	SOLUCIÓN MÉTODO ALGEBRAICO	INTERPRETACIÓN GRÁFICA
• Leer detenidamente el problema • Identificar los datos y la o las incógnitas • Separar cada una de las partes del problema, nombrando a la o las *Incógnitas*	$3x + 8 = 4x + 6$	$3x+8(-8)=4x+6+(-8)$ $3x=4x-2$ $3x+(-4x)=4x+(-4x)-2$ $-x=-2$ $(-1)(-x)=-2(-1)$ $x=2$	Se pueden dar valores para x y así obtener los puntos que se grafican en el plano cartesiano

RECAPITULACIÓN

El siguiente esquema te ayudará a recordar cada uno de los temas que se revisaron en este capítulo:



Ahora con los conocimientos que has adquirido resuelve el siguiente problema dando una solución gráfica como algebraica.
Miguel, Carlos y Raúl al sumar sus edades obtuvieron un total de 26 años. Si Carlos es 3 años menor que el doble de la edad de Miguel, y Raúl es un año mayor que la mitad de Miguel. ¿Que edad tiene cada uno?.

ACTIVIDADES INTEGRALES

Estos ejercicios se han preparado para que apliques lo que aprendiste en este capítulo. Resuélvelos algebraicamente e interprétalos gráficamente indicando el punto donde la línea recta se intersecta al eje “x” de las abscisas.

1. Un carpintero debe hacer marcos rectangulares, y para ello cuenta con tiras de madera cuya longitud es de 75 cm. Si el largo del marco debe ser 15 cm mayor que el ancho, ¿cuáles son las dimensiones de los marcos?.

2. El segundo de tres números enteros es dos tercios del primero, el tercero es menos un quinto del segundo. Los tres números suman 23. Obtén los números.

3. Si el numerador de una fracción se le resta cinco y al denominador se le suma 2, la fracción resultante es menos un tercio. El denominador es una unidad mayor que el numerador. Obtén la fracción original.

4. Dos números suman 16 y su diferencia es menos cinco. Obtén los números.

5. La sección transversal de una barra de acero es la de un triángulo isósceles. El perímetro de dicho triángulo es de 64 cm. Si la razón entre uno de los lados iguales y el tercero es de 5/6. Obtén las dimensiones de la sección de la barra.

6. Se requiere cercar con malla de alambre un terreno de forma rectangular. Si el largo es el triple del ancho, menos 10 m, y el perímetro es de 620 m, ¿cuáles son las dimensiones del terreno?.

7. El ancho y la longitud de un rectángulo está en razón de 3/4, si las dimensiones se incrementan en tres unidades lineales, el área se incrementa en 135 m^2 . ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?.

8. Los terrenos que ofrece una compañía fraccionadora tienen 400 m de perímetro. Si estos son rectangulares y el ancho es dos tercios del largo, ¿cuáles son las dimensiones de cada terreno?.

9. Una persona vendió boletos para dos rifas; el boleto de una costó $1.00 y el de la otra $5.00. La persona vendió 25 boletos en total y obtuvo $49.00 pero no tomó nota de cuantos boletos vendió para cada rifa. Obtén el número de boletos vendidos para cada una.

10. Una ama de casa pagó $114.00 por 13 kg. de arroz y frijol, el kilogramo de arroz y frijol cuesta $8.00 y $10.00 respectivamente. ¿Cuántos kilogramos de arroz y cuántos de frijol compró?.

AUTOEVALUACIÓN

Las respuestas que a continuación te presentamos son la solución de los problemas anteriores; compáralas con las que obtuviste. Si encuentras alguna diferencia realiza nuevamente el ejercicio y si tienes alguna duda consulta a tu asesor.

1. Modelo matemático: $2x + 2(x + 15) = 75$ (11.25, 0)

largo 26.25 cm
ancho 11.25 cm

2. Modelo matemático: $x + \frac{2x}{3} - \frac{2x}{15} = 23$ (15, 0)

1er. número: 15
2do. número: 10
3er. número: -2

3. Modelo matemático: $\frac{x-5}{x+3} = -\frac{1}{3}$ (3, 0)

Numerador: 3
Denominador: 4

4. Modelo matemático: $x - (16 - x) = -5$ (5.5, 0)

Número menor: 5.5
Número mayor: 10.5

5. Modelo matemático: $\frac{L}{b} = \frac{5}{6}, \quad 2(\frac{5b}{6}) + b = 64$ (24, 0)

Dimensiones:
b = 24
L = 20

6. Modelo matemático: $2x + 2(3x - 10) = 620$ (80, 0)

Dimensiones:
ancho: 80 m
largo: 230 m

7. Modelo matemático: $A = x(\frac{3x}{4})$, $(x+3)(\frac{3x}{4}+3) = A + 135$ (24, 0)

Dimensiones:
$x = 24m$

$\frac{3x}{4} = 18m$

8. Modelo matemático: $2x + 2(\frac{2x}{3}) = 400$ (120, 0)

Dimensiones:
$x = 120m$

$\frac{2x}{3} = 80m$

9. Modelo matemático: $x + 5(25 - x) = 49$ (19, 0)

Venta:
boletos de la rifa de $1.00 : 19
boletos de la rifa de $5.00 : 6

10. Modelo matemático: $8x + 10(13 - x) = 114$ (8, 0)

kilogramos de arroz: 8
kilogramos de frijol: 5

C A P Í T U L O 2

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

2.1 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

P R O P Ó S I T O

Como establecimos desde el Fascículo I el álgebra nos ayuda a tomar decisiones para solucionar problemas concretos, y para ello debemos traducir el lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico. En el capítulo anterior aprendiste a resolver problemas que dan lugar a ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Pero existe otro tipo de problemas, en los que tenemos que encontrar más de un valor, por ello en este capítulo:

¿QUÉ APRENDERÁS?

A establecer los modelos algebraicos para problemas que dan lugar a ecuaciones de primer grado con dos y tres incógnitas.

¿CÓMO LO LOGRARÁS?

Los métodos que nos permiten solucionar un sistema de ecuaciones, como: el gráfico, el de suma o resta; el de sustitución; el de igualación, y por determinantes

¿PARA QUÉ TE VA A SERVIR?

Tomar decisiones para solucionar problemas de Física, Química y Biología, entre otras áreas del conocimiento.

CAPÍTULO 2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Conforme avanzamos en nuestros estudios, nos enfrentamos a problemas cada vez más complejos, los cuales rebasan la aritmética y por lo tanto, debemos aplicar el álgebra. Así, en Estadística, Física o Biología, encontramos problemas con dos incógnitas y su solución nos permite comprender las teorías o principios que se estén tratando, a través de un sistema de ecuaciones podemos encontrar los valores requeridos y asegurar nuestra comprensión del contenido.

Resolver un sistema de ecuaciones es realmente sencillo y nos permite interpretar objetivamente un problema.

2.1 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

2.1.1 SOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE DAN LUGAR AL PLANTEAMIENTO DE SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Existen problemas en los que es necesario encontrar dos o tres datos que están relacionados, y al traducirlos al lenguaje algebraico se forman dos o tres ecuaciones lineales de dos o tres incógnitas. En estos casos decimos que se forma un sistema de ecuaciones lineales.

Un sistema de ecuaciones se puede solucionar por el método gráfico y los métodos analíticos, los cuales estudiaremos en este capítulo.

Para la solución de problemas que dan lugar a un sistema de ecuaciones con dos incógnitas se resolverán gráficamente y analíticamente.

Para la solución de problemas que dan lugar a sistema de ecuaciones con tres incógnitas, se resolverán únicamente aplicando el método analítico, por determinantes. Es importante señalar que para explicar cada uno de los métodos gráficos y analíticos se procederá primero a mencionar el problema que dé como planteamiento un sistema de ecuaciones, posteriormente se resolverá el sistema por medio del método que se va a explicar.

2.1.2 MÉTODO GRÁFICO

En este tema estudiaremos algunos problemas que dan lugar a un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, y para solucionarlo aplicaremos el método gráfico, el cual permite encontrar los valores de las incógnitas a partir del plano cartesiano, que dan solución al problema.

Te recomendamos que analices con detenimiento cada paso en la resolución de los sistemas comparando la explicación con el procedimiento realizado.

Ejemplos: A continuación se plantean una serie de problemas con los procedimientos y soluciones para cada uno de ellos, así como sus representaciones gráficas.

Problema

El perímetro de un rectángulo es de 18 cm. El doble de largo, excede el ancho 6 cm ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?.

Datos

Perímetro = 18 m
El doble del largo excede al ancho 6 cm
Largo del rectángulo = x
Ancho del rectángulo = y

Sistemas de ecuaciones

$$2(x+y)=18 \qquad \text{- - - - - - - - - -} \ (1)$$
$$2x=y+6 \qquad \text{- - - - - - - - - -} \ (2)$$

Procedimiento

i. Despejamos "y" en la ecuación (1) y (2)

$$2(x+y)=18 \qquad \text{- - - - - - - - - -} \ (1)$$
$$2x+2y=18$$
$$2y=18-2x$$
$$y=\frac{18-2x}{2}$$
$$y=9-x \qquad \text{- - - - - - - - - -} \ (3)$$
$$2x=y+6 \qquad \text{- - - - - - - - - -} \ (2)$$
$$2x-y=6$$
$$-y=-2x+6$$
$$y=2x-6 \qquad \text{- - - - - - - - - -} \ (4)$$

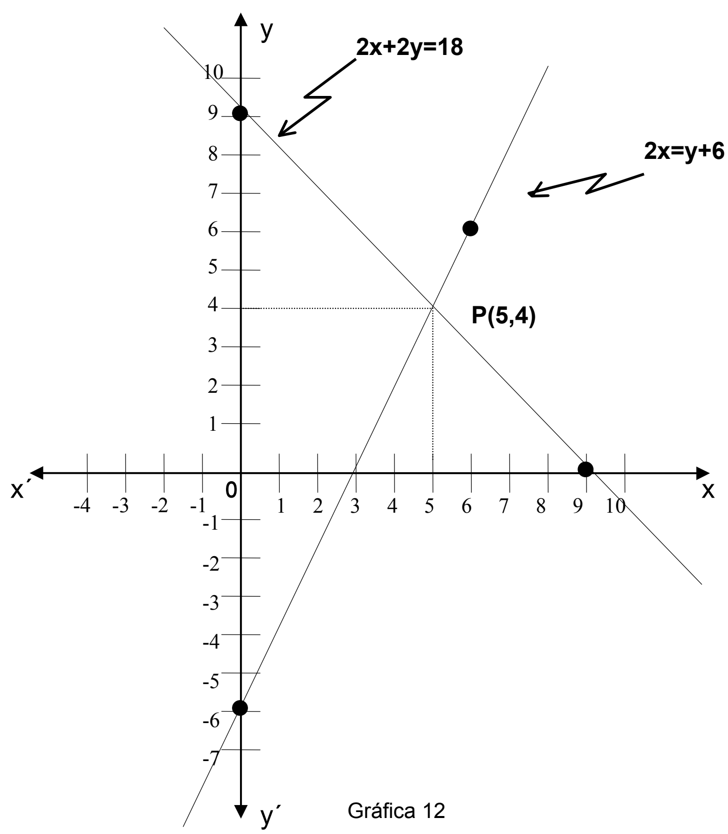
ii. Tabulamos los valores:

Para esto le asignamos valores a "x" para obtener los de "y"

x	y = 9 - x	y	P(x, y)
0	y = 9 - 0	9	(0,9)
1	y = 9 - 1	8	(1,8)
2	y = 9 - 2	7	(2,7)
3	y = 9 - 3	6	(3,6)
4	y = 9 - 4	5	(4,5)
5	y = 9 - 5	4	(5,4)
6	y = 9 - 6	3	(6,3)

x	y = 2x - 6	y	P(x, y)
0	y = 2(0) - 6	- 6	(0, - 6)
1	y = 2(1) - 6	- 4	(1, - 4)
2	y = 2(2) - 6	- 2	(2, - 2)
3	y = 2(3) - 6	0	(3, 0)
4	y = 2(4) - 6	2	(4, 2)
5	y = 2(5) - 6	4	(5, 4)
6	y = 2(6) - 6	6	(6, 6)

iii. Graficamos los valores



Gráfica 12

iv. Interpretación

Observa que en las dos tabulaciones al asignarle el valor de 5 a “x” obtenemos como valor de “y” 4; que es el punto donde se intersectan las dos rectas y corresponde a la solución del sistema. Por lo tanto:

Largo del rectángulo ; x = 5
Ancho del rectángulo ; y = 4

La solución del sistema es simultánea porque los valores satisfacen ambas ecuaciones.

v. Comprobación

Sustituimos los valores de las variables en la ecuaciónes (3) y (4).

$$y = 9 - x \quad \text{- - - - - - - - - -} \ (3)$$
$$y = 9 - 5$$
$$y = 4$$

$$y = 2x - 6 \quad \text{- - - - - - - - - -} \ (4)$$
$$y = 2(5) - 6$$
$$y = 10 - 6$$
$$y = 4$$

Al obtener el mismo resultado en ambas ecuaciones, se comprueba que los valores para “x” y “y” son correctos.

Problema

Al comprar cuatro caramelos y siete lápices pagué $29.00. Más tarde compre dos caramelos y cinco lápices y pagué $19.00, ¿cuál es el costo de los caramelos y los lápices?.

Datos

LENGUAJE COMÚN	LENGUAJE ALGEBRAICO
Costo de un caramelo	x
Costo de un lápiz	y
Costo de cuatro caramelos más siete lápices es de $29.00	$4x + 7y = 29$
Costo de dos caramelos y cinco lápices es de $19.00	$2x + 5y = 19$

Sistema de ecuaciones

$4x + 7y = 29$ - - - - - - - - - (1)

$2x + 5y = 19$ - - - - - - - - - (2)

Procedimiento

i. Despejamos "y" en las dos ecuaciones del sistema

$4x + 7y = 29$ - - - - - - - - - (1)

$7y = 29 - 4x$

$y = \dfrac{29 - 4x}{7}$ - - - - - - - - - (3)

$2x + 5y = 19$ - - - - - - - - - (2)

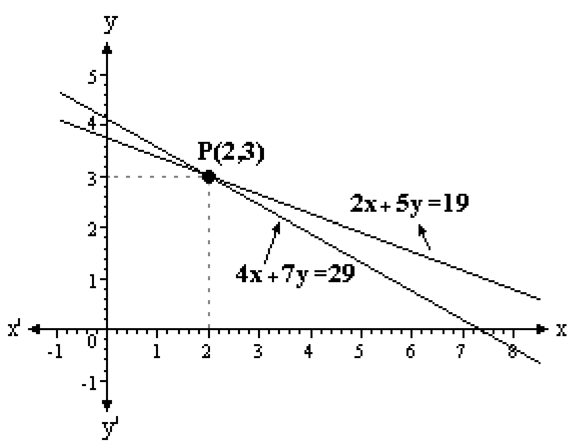
$5y = 19 - 2x$

$y = \dfrac{19 - 2x}{5}$ - - - - - - - - - (4)

ii. Tabulamos los valores: para lo cual le asignamos valores a "x"

x	$y = \dfrac{29 - 4x}{7}$	y	P(x,y)
0	$y = \dfrac{29 - 4(0)}{7}$	$\dfrac{29}{7}$	$\left(0, \dfrac{29}{7}\right)$
1	$y = \dfrac{29 - 4(1)}{7}$	$\dfrac{25}{7}$	$\left(1, \dfrac{25}{7}\right)$
2	$y = \dfrac{29 - 4(2)}{7}$	3	(2,3)
3	$y = \dfrac{29 - 4(3)}{7}$	$\dfrac{17}{7}$	$\left(3, \dfrac{17}{7}\right)$
4	$y = \dfrac{29 - 4(4)}{7}$	$\dfrac{13}{7}$	$\left(4, \dfrac{13}{7}\right)$
5	$y = \dfrac{29 - 4(5)}{7}$	$\dfrac{9}{7}$	$\left(5, \dfrac{9}{7}\right)$
6	$y = \dfrac{29 - 4(6)}{7}$	$\dfrac{5}{7}$	$\left(6, \dfrac{5}{7}\right)$
7	$y = \dfrac{29 - 4(7)}{7}$	$\dfrac{1}{7}$	$\left(7, \dfrac{1}{7}\right)$

x	$y = \dfrac{19 - 2x}{5}$	y	P(x,y)
0	$y = \dfrac{19 - 2(0)}{5}$	$\frac{19}{5}$	$\left(0, \frac{19}{5}\right)$
1	$y = \dfrac{19 - 2(1)}{5}$	$\frac{17}{5}$	$\left(1, \frac{17}{5}\right)$
2	$y = \dfrac{19 - 2(2)}{5}$	3	$(2,3)$
3	$y = \dfrac{19 - 2(3)}{5}$	$\frac{13}{5}$	$\left(3, \frac{13}{5}\right)$
4	$y = \dfrac{19 - 2(4)}{5}$	$\frac{11}{5}$	$\left(4, \frac{11}{5}\right)$
5	$y = \dfrac{19 - 2(5)}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\left(5, \frac{9}{5}\right)$
6	$y = \dfrac{19 - 2(6)}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\left(6, \frac{7}{5}\right)$
7	$y = \dfrac{19 - 2(7)}{5}$	1	$(7,1)$



Gráfica 13

iv. Interpretación

El punto de intersección en la gráfica, es la solución del sistema de ecuaciones, por lo tanto:

Costo de un caramelo = $x = \$2.00$
Costo de un lápiz = $y = \$3.00$

v. Comprobación

Sustituimos los valores en las ecuaciones (3) y (4):

$$y = \frac{29-4x}{7} \qquad \text{- - - - - - - - - (3)}$$
$$y = \frac{29-4(2)}{7}$$
$$y = \frac{29-8}{7}$$
$$y = \frac{21}{7}$$
$$y = 3$$

$$y = \frac{19-2x}{5} \qquad \text{- - - - - - - - - (4)}$$
$$y = \frac{19-2(2)}{5}$$
$$y = \frac{19-4}{5}$$
$$y = \frac{15}{5}$$
$$y = 3$$

Al obtener el mismo resultado en ambas ecuaciones, concluimos que los valores son correctos.

A partir de estos problemas, podemos observar que existe un punto en común para ambas rectas (puntos de intersección), que determina los valores de “x”; “y”, el cual es la solución del problema.

Así, cuando las dos rectas se intersectan en un punto, el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se clasifican como solución única.

El resultado de un sistema de ecuaciones es la solución simultánea y en la gráfica es el punto de intersección.
Analicemos el siguiente problema:

Problema

Se desea saber cuáles son los números que sumados dan 15 y su diferencia es 3.

Datos

LENGUAJE COMÚN	LENGUAJE ALGEBRAICO
Cuales son los números	x, y
Que sumados dan 15	$x + y = 15$
Y su diferencia es 3	$x - y = 3$

Sistema de ecuaciones

$x + y = 15$ - - - - - - - - - - (1)
$x - y = 3$ - - - - - - - - - - (2)

Procedimiento

i. Despejamos "y" en ambas ecuaciones

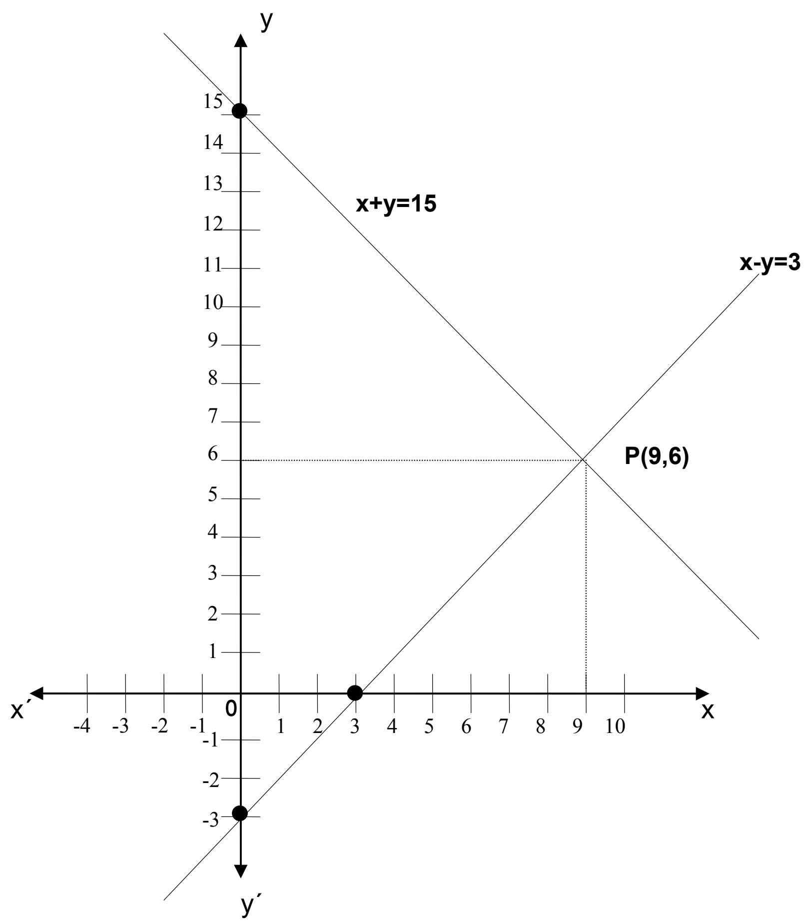
$y = 15 - x$ - - - - - - - - - - (3)
$y = x - 3$ - - - - - - - - - - (4)

ii. Tabulamos los valores: para lo cual le asignamos valores a "x"

x	$y = 15 - x$	y	P(x, y)
0	$y = 15 - 0$	15	(0,15)
2	$y = 15 - 2$	13	(2,13)
4	$y = 15 - 4$	11	(4,11)
6	$y = 15 - 6$	9	(6,9)

x	$y = x - 3$	y	P(x, y)
0	$y = 0 - 3$	–3	(0,–3)
2	$y = 2 - 3$	–1	(2,–1)
4	$y = 4 - 3$	1	(4,1)
6	$y = 6 - 3$	3	(6,3)

iii Gráficamos los valores



Gráfica 14

iv. Interpretación:

El punto donde se intersectan ambas rectas, corresponde a los valores para “x” y “y” que satisfacen ambas ecuaciones , es decir, a la solución del problema por lo que podemos decir que los números son:

x = 9

y = 6

v. Comprobación

Substituimos las literales por los valores encontrados en las ecuaciones (3) y (4)

$$y = 15 - x \quad \text{- - - - - - - - - (3)} \qquad y = x - 3 \quad \text{- - - - - - - - - (4)}$$
$$y = 15 - 9 \qquad\qquad\qquad\qquad y = 9 - 3$$
$$y = 6 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad y = 6$$

Al observar que en la gráfica se intersectan las dos rectas de las ecuaciones lineales, decimos que es un sistema con solución única.

Ahora bien, existen casos donde las rectas de las ecuaciones lineales coinciden sobre el mismo plano, cuando esto sucede, decimos que dichas ecuaciones son equivalentes; veamos esto en el siguiente sistema de ecuaciones:

Sistema de ecuaciones

$$2x - y - 6 = 0 \quad \text{- - - - - - - - - (1)}$$
$$4x - 12 = 2y \quad \text{- - - - - - - - - (2)}$$

Procedimiento

i. Despejamos "y" en ambas ecuaciones

$$2x - y - 6 = 0 \quad \text{- - - - - - - - - (1)}$$
$$2x - y = 6$$
$$-y = 6 - 2x$$
$$y = 2x - 6 \quad \text{- - - - - - - - - (3)}$$

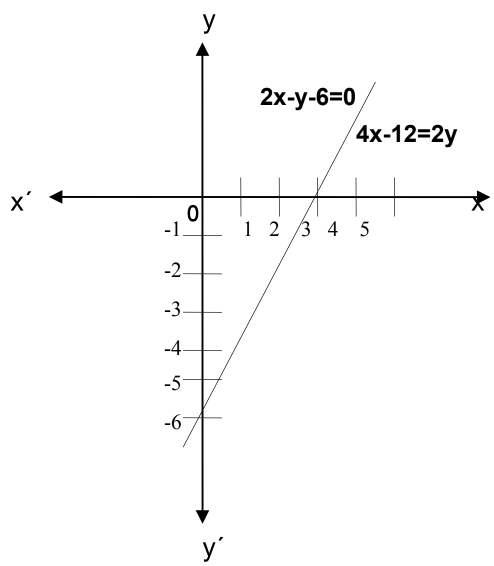
$$4x - 12 = 2y \quad \text{- - - - - - - - - (2)}$$
$$\frac{4x - 12}{2} = y$$
$$y = 2x - 6 \quad \text{- - - - - - - - - (4)}$$

Observa que al despejar “y” las ecuaciones (3) y (4) son equivalentes ó iguales

ii. Tabulamos los valores

x	y = 2x - 6	y	P(x,y)
2	y = 2(2) - 6	-2	(2, -2)
4	y = 2(2) - 6	2	(4, 2)
6	y = 2(2) - 6	6	(6, 6)
8	y = 2(2) - 6	10	(8, 10)

iii. Graficamos los valores



Gráfica 15

iv. Interpretación

Debido a que las ecuaciones del sistema son equivalentes, ambas corresponden a la misma recta, por lo que se dice que el sistema tiene múltiples soluciones.

También existen sistemas en los que no se llaga a la solución. Esto se presenta cuando las rectas de las ecuaciones lineales son paralelas entre sí (no se intersectan en ningún punto).

v. Gráfiquemos los valores

Veamos esto en el siguiente sistema de ecuaciones:

Sistema de ecuaciones

$y = 2x + 4$ - - - - - - - - - (1)
$2x - y = 1$ - - - - - - - - - (2)

Procedimiento

i. Despejamos “y” en ambas ecuaciones

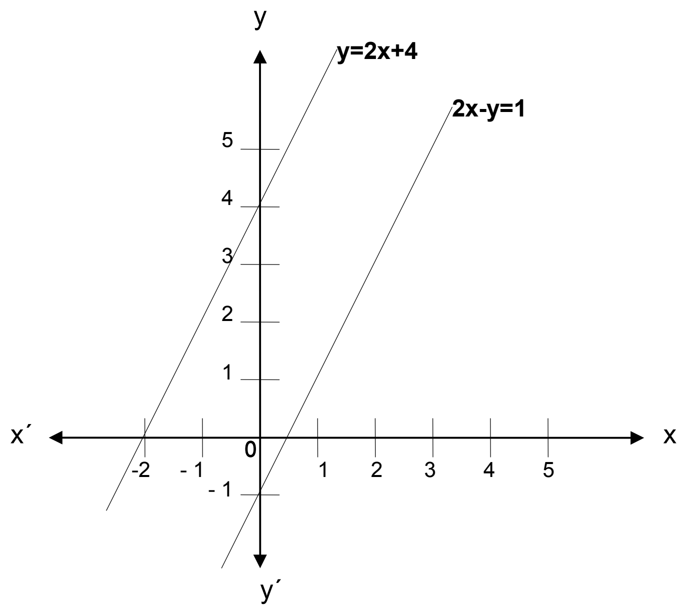
$y = 2x + 4$ - - - - - - - - - (3)
$y = 2x - 1$ - - - - - - - - - (4)

ii. Tabulamos los valores : para lo cual le asignamos valores a “‘x’”

x	y = 2x + 4	y	(x, y)
-3	$y = 2(-3) + 4$	-2	$(-3,-2)$
-2	$y = 2(-2) + 4$	0	$(-2,\mathbf{0})$
-1	$y = 2(-1) + 4$	2	$(-1, 2)$
0	$y = 2(0) + 4$	4	$(0, 4)$
1	$y = 2(1) + 4$	6	$(1, 6)$
2	$y = 2(2) + 4$	8	$(2, 8)$
3	$y = 2(3) + 4$	10	$(3,10)$

x	y = 2x - 1	y	(x, y)
-3	$y = 2(-3) - 1$	-7	$(-3,-7)$
-2	$y = 2(-2) - 1$	-5	$(-2,-5)$
-1	$y = 2(-1) - 1$	-3	$(-1,-3)$
0	$y = 2(0) - 1$	-1	$(0,-1)$
1	$y = 2(1) - 1$	1	$(1,1)$
2	$y = 2(2) - 1$	3	$(2,3)$
3	$y = 2(3) - 1$	5	$(3,5)$

iii. Graficamos los valores



Gráfica 16

iv. Interpretación

Debido a que las rectas de las ecuaciones del sistema son paralelas entre sí, se dice que el sistema no tiene solución, por lo cuál es incompatible o inconsistente.

Problema

En un salón de clases con 48 alumnos, a cada uno de ellos se les pidió una cuota: \$20.00 por varón y \$30.00 por mujer, recaudándose \$1,140.00 . ¿Cuántas alumnas y cuántos alumnos hay en el grupo?.

LENGUAJE COMÚN	LENGUAJE ALGEBRAICO
Número de alumnos	x
Número de alumnas	y
Total de alumnos	$x + y = 48$
Cuota por alumno	$20x + 30y = 1140$

Sistema de ecuaciones

$x + y = 48$ - - - - - - - - - (1)

$20x + 30y = 1140$ - - - - - - - - - (2)

Procedimiento

i. Despejamos “y” en ambas ecuaciones

$y = 48 - x$ - - - - - - - - - (3)

$y = 38 - \frac{2}{3}x$ - - - - - - - - - (4)

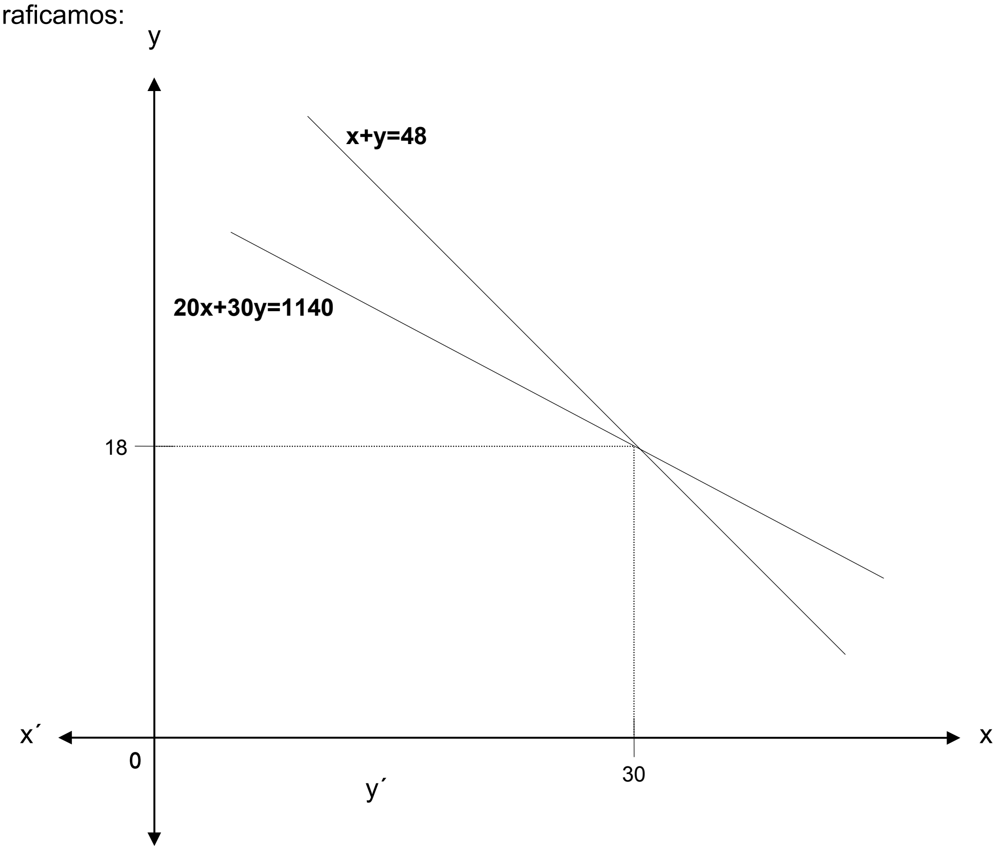
ii. Tabulamos los valores : para lo cual le asignamos valores a “x”

x	**y = 48 - x**	**y**	**P(x, y)**
10	$y = 48 - 10$	38	(10,38)
20	$y = 48 - 20$	28	(20,28)
30	$y = 48 - 30$	18	(30,18)
40	$y = 48 - 40$	8	(40,8)

x	$y = 38 - \frac{2}{3}x$	y	P(x, y)
10	$y = 38 - \frac{2}{3}(10)$	31	(10,31)
20	$y = 38 - \frac{2}{3}(20)$	25	(20,25)
30	$y = 38 - \frac{2}{3}(30)$	18	(30,18)
40	$y = 38 - \frac{2}{3}(40)$	11	(40,11)

Nota: los datos se redondearon

Graficamos:



Gráfica 17

Interpretación

En este caso se trata de un sistema de ecuaciones lineales de solución única, y obtenemos que:

Número de hombres = 30
Número de mujeres = 18

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Soluciona los siguientes problemas por el método gráfico identificando el tipo de sistema del que se trate.

El cuádruplo de un número excede en seis al triple del otro; mientras que el óctuplo del primero es 22 unidades menos que el séptuplo del segundo. Determina ambos enteros.

x = _________
y = _________
sistema: _______________

1. Guillermo invirtió parte de su dinero al 22% y el resto al 15%. El ingreso por ambas inversiones fue de $3,000.00; si hubiera intercambiado sus inversiones, el ingreso hubiera sido de $2,940.00. ¿Qué cantidad tenía en cada inversión?.

   x = _________
   y = _________
   sistema: _______________

2. Un hombre rema ocho millas en un río contra corriente durante dos horas y de regreso hace una hora. Encuentra las velocidades de la corriente y del hombre remando en aguas tranquilas.

   x = _________
   y = _________
   sistema: _______________

3. Si a una solución de ácido al 20%, se agrega otra al 50%, resulta una mezcla al 38%. Si hubiera 10 galones más de la solución al 50%, la nueva mezcla resultaría al 40% de ácido. ¿Cuántos galones de ácido se tienen de cada solución?.

   x = _________
   y = _________
   sistema: _______________

NOTA:

Como puedes observar el procedimiento para resolver un problema donde interviene un sistema de ecuaciones, aplicando el método gráfico es:

- Identificar los elementos del problema distinguiendo los datos conocidos y las incógnitas a conocer y traducir el problema del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico.
- Establecer el sistema de ecuaciones.
- Despejar "y" en ambas ecuaciones.
- Realizar la tabulación asignándole valores a "x" para obtener los valores de "y".
- Graficar los datos y localizar los puntos de la intersección para definir los valores de "x" y "y".
- Comprobar el resultado.

Las gráficas que representan un sistema de ecuaciones se pueden clasificar en:

- Sistema con solución única; cuando la interpretación gráfica de las dos ecuaciones corresponden a dos rectas que se intersectan, en un determinado punto.
- Sistema con múltiples soluciones; cuando la interpretación gráfica de las dos ecuaciones corresponden a una misma recta.
- Sistema sin solución; cuando la interpretación gráfica de las dos ecuaciones corresponden a dos rectas paralelas entre sí.

En el último caso también se dice que el sistema es incompatible o inconsistente.

2.1.3 MÉTODO ANALÍTICO

Hasta aquí has aplicado el método gráfico para resolver un sistema de ecuaciones simultáneas; sin embargo, en algunos casos, éste no es exacto, ya que se deben estimar las coordenadas de un punto sobre la gráfica.

En este tema analizaremos otros métodos que son más exactos: los analíticos; que son por eliminación o por determinantes.

Los métodos por eliminación consisten, como su nombre lo indica, en eliminar una de las variables, obteniendo una ecuación con una incógnita, tomando como base el sistema original, y se pueden resolver por suma o resta; por sustitución y por igualación.

El método por determinantes se forma por los coeficientes de las variables correspondientes a cada ecuación.

a) Método de Eliminación por Suma o Resta.

En este método se elimina una de las variables sumando o restando las ecuaciones del sistema, para lo cuál es necesario que el coeficiente de la variable que se eliminará sea igual en ambas ecuaciones.

Ejemplos:

Analiza los siguientes sistemas de ecuaciones:

Sistema de ecuaciones

$3x - 7 = y$ - - - - - - - - - (1)

$4x - 5y = 2$ - - - - - - - - - (2)

Procedimiento

i. Ordenamos las ecuaciones para que los términos semejantes queden en la misma columna.

$3x - 7 = y$ - - - - - - - - - (1)

$3x - y = 7$

ii. Multiplicamos una de las ecuaciones para que el coeficiente de una de las variables sea igual en ambas ecuaciones.

$5(3x - y = 7)$

$15x - 5y = 35$ - - - - - - - - - (3)

iii. Eliminamos la incógnita cuyos coeficientes son iguales, por medio de una resta.

$$\begin{array}{rl} & 15x - 5y = 35 \quad \text{- - - - - - - - - (3)} \\ - & \underline{\;\;4x - 5y = 2\;\;} \quad \text{- - - - - - - - - (2)} \\ & 11x \qquad\; = 33 \end{array}$$

iv. Resolver la ecuación que resulta, para encontrar el valor de “x” .

$$11x = 33 \qquad \text{- - - - - - - - - (4)}$$

$$x = \frac{33}{11}$$

$$x = 3$$

v. Sustituimos el valor de “x” en una de las ecuaciones iniciales para encontrar el valor de “y” .

$$3x - 7 = y$$
$$3(3) - 7 = y$$
$$9 - 7 = y$$
$$2 = y$$

vi. Comprobamos los valores encontrados para “x” y “y”, sustituyéndolos en las ecuaciones (1) y (2).

$$3x - 7 = y \qquad \text{- - - - - - - - - (1)}$$
$$3(3) - 7 = 2$$
$$9 - 7 = 2$$
$$2 = 2$$

$$4x - 5y = 2 \qquad \text{- - - - - - - - - (2)}$$
$$4(3) - 5(2) = 2$$
$$12 - 10 = 2$$
$$2 = 2$$

Sistema de ecuaciones

$$13x = 57 + 4y \qquad \text{- - - - - - - - - (1)}$$
$$2y = 29 - 5x \qquad \text{- - - - - - - - - (2)}$$

Procedimiento

i. Ordenamos las ecuaciones

$$13x - 4y = 57 \qquad \text{- - - - - - - - - (1)}$$
$$5x + 2y = 29 \qquad \text{- - - - - - - - - (2)}$$

ii. Multiplicamos la ecuación (2) por 2 para que el coeficiente de “y” sea igual en ambas ecuaciones.

$$2(5x + 2y = 29)$$
$$10x + 4y = 58 \qquad \text{- - - - - - - - - (3)}$$

iii. Sumamos las ecuaciones (1) y (3) para eliminar la variable “y”.

$$\begin{array}{l} 13x - 4y = 57 \\ \underline{10x + 4y = 58} \\ 23x \quad\quad \mathbf{= 115} \end{array} \qquad \text{- - - - - - - - - (4)}$$

iv. Resolvemos la ecuación (4) para obtener el valor de “x” .

$$23x = 115 \qquad \text{- - - - - - - - - (4)}$$
$$x = \frac{115}{23}$$
$$x = 5$$

v. Sustituimos “x” en la ecuación (1) ó (2) para obtener el valor de “y”.

$$2y = 29 - 5x \qquad \text{- - - - - - - - - (2)}$$
$$2y = 29 - 5(5)$$
$$2y = 29 - 25$$
$$2y = 4$$
$$y = \frac{4}{2}$$
$$y = 2$$

vi. Comprobamos los valores encontrados para “x” y “y”, sustituyéndolos en las ecuaciones (1) y (2).

$$13x = 57 + 4y \qquad \text{- - - - - - - - - (1)}$$
$$13(5) = 57 + 4(2)$$
$$65 = 57 + 8$$
$$65 = 65$$

$$2y = 29 - 5x \qquad \text{- - - - - - - - - (2)}$$
$$2(2) = 29 - 5(5)$$
$$4 = 29 - 25$$
$$4 = 4$$

Sistema de ecuaciones

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 5 \qquad \text{- - - - - - - - - -} \ (1)$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = -3 \qquad \text{- - - - - - - - - -} \ (2)$$

Procedimiento

Observa que en este sistema, los términos semejantes están ordenados y que el coeficiente de "x" es igual en ambas ecuaciones. Por lo tanto:

Restamos la ecuación (1) y (2) para eliminar la variable "x" y encontrar el valor de "y".

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 5 \\ - \ \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = -3 \\ \hline y = 8 \end{array}$$

Sustituimos "y" en la ecuación (2) para obtener el valor de "x".

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = -3 \qquad \text{- - - - - - - - - -} \ (2)$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}(8) = -3$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{24}{4} = -3$$

$$\frac{1}{2}x - 6 = -3$$

$$\frac{1}{2}x = -3 + 6$$

$$x = 3(2)$$

$$x = 6$$

Comprobemos los valores encontrados para “x” y “y”.

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 5 \qquad \text{- - - - - - - - - (1)}$$
$$\frac{1}{2}(6) + \frac{1}{4}(8) = 5$$

$$\frac{6}{2} + \frac{8}{4} = 5$$
$$3 + 2 = 5$$
$$5 = 5$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = -3 \qquad \text{- - - - - - - - - (2)}$$
$$\frac{1}{2}(6) - \frac{3}{4}(8) = -3$$
$$\frac{6}{2} - \frac{24}{4} = -3$$
$$3 - 6 = -3$$
$$-3 = -3$$

b) Método de Eliminación por Sustitución

Este método consiste en despejar a una de las variables en una ecuación y posteriormente sustituir la variable despejada en la segunda ecuación; de esta manera se obtiene una ecuación con una incógnita y se resuelve.

Ejemplos:

Analiza este procedimiento en los siguientes sistemas.

Sistema de Ecuaciones

$$4x - 2y = -10 \qquad \text{- - - - - - - - - (1)}$$
$$2x + y = -3 \qquad \text{- - - - - - - - - (2)}$$

i. Despejar “y” de ecuación (2)

$$y = -3 - 2x \qquad \text{- - - - - - - - - (3)}$$

ii. Sustituir “y” en la ecuación (1) para obtener el valor de “x”

$$4x-2y=-10$$
$$4x-2(-3-2x)=-10$$
$$4x+6+4x=-10$$
$$8x=-10-6$$
$$x=\frac{-16}{8}$$
$$x=-2$$

iii. Sustituir “x” en la ecuación (3) para obtener el valor de “y”.

$$y=-3-2x \qquad \text{- - - - - - - - - - (3)}$$
$$y=-3-2(-2)$$
$$y=-3+4$$
$$y=1$$

iv. Comprobación: Sustituir los valores de “x” y “y” en las ecuaciones (1) y (2)

$$4x-2y=-10 \qquad \text{- - - - - - - - - - (1)}$$
$$4(-2)-2(1)=-10$$
$$-8-2=-10$$
$$-10=-10$$

$$2x+y=-3 \qquad \text{- - - - - - - - - - (2)}$$
$$2(-2)+1=-3$$
$$-4+1=-3$$
$$-3=-3$$

Sistema de ecuaciones

$$2x+5y=-1 \qquad \text{- - - - - - - - - - (1)}$$
$$3x-2y=8 \qquad \text{- - - - - - - - - - (2)}$$

i. Despejar “x” en la ecuación (1)

$$2x+5y=-1$$
$$2x=-1-5y$$
$$x=\frac{-1-5y}{2} \qquad \text{- - - - - - - - - - (3)}$$

ii. Sustituir “x” en la ecuación (2) para obtener el valor de “y”.

$$3x - 2y = 8 \qquad \text{- - - - - - - - - (1)}$$

$$3(\frac{-1-5y}{2}) - 2y = 8$$

$$\frac{-3-15y}{2} - 2y = 8$$

$$2(\frac{-3-15y}{2} - 2y = 8)$$

$$-3 - 15y - 4y = 16$$

$$-19y = 16 + 3$$

$$y = \frac{19}{-19}$$

$$y = -1$$

iii. Sustituir “y” en la ecuación (3) para obtener el valor de “x”.

$$x = \frac{-1-5(-1)}{2}$$

$$x = \frac{-1+5}{2}$$

$$x = \frac{4}{2}$$

$$x = 2$$

iv. Comprobación: Sustituir los valores de “x” y “y” en las ecuaciones (1) y (2).

$$2x + 5y = -1$$

$$2(2) + 5(-1) = -1$$

$$4 - 5 = -1$$

$$-1 = -1$$

$$3x - 2y = 8$$

$$3(2) - 2(-1) = 8$$

$$6 + 2 = 8$$

$$8 = 8$$

Sistema de ecuaciones

$x + 3y = -5$ - - - - - - - - - - (1)

$2x - y = -3$ - - - - - - - - - - (2)

i. Despejar "x" en la ecuación (1)

$x + 3y = -5$

$x = -5 - 3y$ - - - - - - - - - - (3)

ii. Sustituir "x" en la ecuación (2) para obtener el valor de "y"

$2x - y = -3$ - - - - - - - - - - (2)

$$2(-5 - 3y) - y = -3$$
$$-10 - 6y - y = -3$$
$$-7y = -3 + 10$$
$$y = \frac{7}{-7}$$
$$y = -1$$

iii. Sustituir "y" en la ecuación (3) para obtener el valor de "x"

$$x = -5 - 3y$$
$$x = -5 - 3(-1)$$
$$x = -5 + 3$$
$$x = -2$$

iv. Comprobación: Sustituir los valores de "x" y "y" en las ecuaciones (1) y (2)

$$x + 3y = -5$$
$$-2 + 3(-1) = -5$$
$$-2 - 3 = -5$$
$$-5 = -5$$

$$2x - y = -3$$
$$2(-2) - (-1) = -3$$
$$-4 + 1 = -3$$
$$-3 = -3$$

c) Método de Eliminación por igualación

En este método, se elimina una variable al despejarla en las dos ecuaciones del sistema, se igualan para obtener el valor de la otra variable; el resultado se sustituye en una de las ecuaciones despejadas y se resuelve para obtener el valor de la primer variable.

Ejemplos:

Analiza este procedimiento con los siguientes sistemas:

Sistema de ecuaciones

$3x + 2y = 5$ - - - - - - - - - (1)

$3x - 4y = -1$ - - - - - - - - - (2)

i. Despejar "x" en las ecuaciones (1) y (2)

$3x + 2y = 5$ - - - - - - - - - (1)

$3x = 5 - 2y$

$x = \frac{5 - 2y}{3}$ - - - - - - - - - (3)

$3x - 4y = -1$ - - - - - - - - - (2)

$3x = -1 + 4y$

$x = -\frac{-1 + 4y}{3}$ - - - - - - - - - (4)

ii. Se igualan las ecuaciones (3) y (4) para obtener el valor de "y"

$\frac{5 - 2y}{3} = \frac{-1 + 4y}{3}$ - - - - - - - - - (5)

$5 - 2y = -1 + 4y$

$-2y - 4y = -1 - 5$

$-6y = -6$

$y = \frac{-6}{-6}$

$y = 1$

iii. Se sustituye el valor de “y” en la ecuación (3) ó (4) para obtener el valor de “x”

$$x = \frac{5-2y}{3} \qquad \text{- - - - - - - - - -} \; (3)$$

$$x = \frac{5-2(1)}{3}$$

$$x = \frac{5-2}{3}$$

$$x = \frac{3}{3}$$

$$x = 1$$

iv. Comprobación: Se sustituye “x” y “y” por los valores obtenidos en las ecuaciones (1) y (2)

$$3x + 2y = 5 \qquad \text{- - - - - - - - - -} \; (1)$$

$$3(1) + 2(1) = 5$$

$$3 + 2 = 5$$

$$5 = 5$$

$$3x - 4y = -1 \qquad \text{- - - - - - - - - -} \; (2)$$

$$3(1) - 4(1) = -1$$

$$3 - 4 = -1$$

$$-1 = -1$$

Sistema de ecuaciones

$$x + 3y = -2 \qquad \text{- - - - - - - - - -} \; (1)$$

$$x - y = 2 \qquad \text{- - - - - - - - - -} \; (2)$$

i. Despejar “x” en las ecuaciones (1) y (2).

$$x + 3y = -2 \qquad \text{- - - - - - - - - -} \; (1)$$

$$x = -2 - 3y \qquad \text{- - - - - - - - - -} \; (3)$$

$$x - y = 2 \qquad \text{- - - - - - - - - -} \; (2)$$

$$x = 2 + y \qquad \text{- - - - - - - - - -} \; (4)$$

ii. Se igualan las ecuaciones (3) y (4) para obtener el valor de “y”.

$-2-3y=2+y$ - - - - - - - - - (5)

$-3y-y=2+2$

$-4y=4$

$y=\dfrac{4}{-4}$

$y=-1$

iii. Se sustituye el valor de “y” en la ecuación (3) ó (4) para obtener el valor de “x” .

$x=2+y$ - - - - - - - - - (4)

$x=2+(-1)$

$x=2-1$

$x=1$

iv. Comprobación: Se sustituye “x” y “y” por los valores obtenidos en las ecuaciones (1) y (2).

$x+3y=-2$ - - - - - - - - - (1)

$1+3(-1)=-2$

$1-3=-2$

$-2=-2$

$x-y=2$ - - - - - - - - - (2)

$1-(-1)=2$

$1+1=2$

$2=2$

Sistema de ecuaciones

$m-p=10$ - - - - - - - - - (1)

$2m+3p=5$ - - - - - - - - - (2)

i. Se despeja *m* en ambas ecuaciones.

$$m - p = 10 \quad \text{- - - - - - - - - (1)}$$
$$m = 10 + p \quad \text{- - - - - - - - - (3)}$$
$$2m + 3p = 5 \quad \text{- - - - - - - - - (2)}$$
$$2m = 5 - 3p$$
$$m = \frac{5 - 3p}{2} \quad \text{- - - - - - - - - (4)}$$

ii. Se igualan las ecuaciones (3) y (4) para obtener el valor de *p.*

$$10 + p = \frac{5 - 3p}{2} \quad \text{- - - - - - - - - (5)}$$
$$20 + 2p = 5 - 3p$$
$$2p + 3p = 5 - 20$$
$$5p = -15$$
$$p = \frac{-15}{5}$$
$$p = -3$$

iii. Se sustituye *p* en la ecuación (3) o (4) para obtener el valor de *m.*

$$m = 10 + p \quad \text{- - - - - - - - - (3)}$$
$$m = 10 + (-3)$$
$$m = 10 - 3$$
$$m = 7$$

iv. Comprobación: Se sustituyen los valores de *m* y *p* en las ecuaciones (1) y (2).

$$m - p = 10 \quad \text{- - - - - - - - - (1)}$$
$$7 - (-3) = 10$$
$$7 + 3 = 10$$

$$2m + 3p = 5 \quad \text{- - - - - - - - - (2)}$$
$$2(7) + 3(-3) = 5$$
$$14 - 9 = 5$$
$$5 = 5$$

d) Método por determinantes

Para comprender el procedimiento para resolver un sistema de ecuaciones por éste método, debemos partir de la ecuación lineal general: $ax + by = c$

Si un sistema se forma por dos ecuaciones lineales, para distinguirlas debemos utilizar subíndices en los coeficientes o en las constantes, así tenemos que:

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad \text{---------} \ (1)$$
$$a_2x + b_2y = c_2 \qquad \text{---------} \ (2)$$

Utilizaremos el método de suma y resta para solucionar este sistema y llegar al de determinantes.

Primero, despejemos la variable “x” , para lo cual multiplicaremos ambas ecuaciones por un valor que haga que los coeficientes de “y” sea el mismo. En este caso multiplicaremos la ecuación (1) por b_2 y la ecuación (2) por b_1.

$$\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \quad \text{---------} \ (1) \\ \quad b_2 \\ \hline a_1b_2x + b_1b_2y = b_2c_1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a_2x + b_2y = c_2 \quad \text{---------} \ (2) \\ \quad b_1 \\ \hline a_2b_1x + b_1b_2y = b_1c_2 \end{array}$$

A través de una resta eliminaremos la variable “y”.

$$\begin{array}{rl} & a_1b_2x + b_1b_2y = b_2c_1 \\ - & \\ & a_2b_1x + b_1b_2y = b_1c_2 \\ \hline & a_1b_2x - a_2b_1x = b_2c_1 - b_1c_2 \end{array}$$

Segundo despejamos la variable “x” , para ello debemos factorizar el primer miembro de la ecuación por factor común:

$$x(a_1b_2 - a_2b_1) = b_2c_1 - b_1c_2$$

Es importante aclarar que para que el sistema tenga solución es necesario que:

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

Si es así entonces obtenemos que:

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Tercero, para despejar "y" seguimos el mismo procedimiento, que se realizó con "x" multiplicando la ecuación (1) por el coeficiente de "x" de la ecuación (2)*[1] y la ecuación (2) por el coeficiente de "x" de la ecuación (1), en este caso $-a_2$; a_1 respectivamente:

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \text{---------} (1) \qquad a_2x + b_2y = c_2 \quad \text{---------} (2)$$

$$-a_2 \qquad\qquad\qquad\qquad a_1$$

$$-a_1a_2x - a_2b_1y = -a_2c_1 \qquad\qquad a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2$$

SUMAMOS

$$\begin{array}{rl} & -a_1a_2x - a_2b_1y = -a_2c_1 \\ + & a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2 \\ \hline & -a_2b_1y + a_1b_2y = -a_2c_1 + a_1c_2 \end{array}$$

FACTORIZAMOS

$$y(a_1b_2 - a_2b_1) = a_1c_2 - a_2c_1$$

DESPEJAMOS

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Así obtenemos los valores para "x" y "y" :

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad\qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Como te darás cuenta, para obtener los valores de las variables "x" y "y" éste procedimiento es largo por lo que es conviene aplicar el determinante. Como vamos a obtener el valor de dos variables, el determinate será de dos por dos.

* Si bien el coeficiente de *x* es positivo, lo consideraremos como negativo para eliminar la variable *x* por suma

El determinante se forma por los valores que obtuvimos en el procedimiento anterior. Observa que el denominador de ambas variables es igual, por lo que se dice que es el determinante del sistema; así encontramos que:

$$\text{denominador} = a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Entonces el determinante se forma colocando en la primer columna los coeficientes de "x" y en la segunda los de "y" y se resuelve:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Entonces para encontrar el valor de "x" tenemos el determinante:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Ahora bien para obtener el determinante de "y" consideramos su numerador:

$$\text{Numerador} = a_1c_2 - a_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

El cual se forma colocando en la primer columna los coeficientes de "x" y en la segunda los términos independientes, y se resuelve:

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

Así para encontrar el valor de "y" tenemos el cociente de los determinantes:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Ejemplos:

Una vez establecido el procedimiento para construir los determinantes de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas los aplicaremos en los siguientes problemas:

Problema

EL perímetro de un rectángulo es de 18 cm. El doble de largo, excede al ancho 6 cm ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?.

Este problema lo resolvimos por el método gráfico y encontramos que el sistema de ecuaciones es:

$$2(x+y)=18 \quad \text{---------} (1)$$
$$2x=y+6 \quad \text{---------} (2)$$

Realizamos la multiplicación en (1) y pasamos a "y" en el primer miembro en (2) para obtener un par de ecuaciones de la forma $ax+by=c$.

$$2(x+y)=18 \quad \text{---------} (1) \qquad 2x=y+6 \quad \text{---------} (2)$$
$$2x+2y=18 \qquad\qquad 2x-y=6$$

Aplicamos el determinante para "x" y "y" con las ecuaciones:

$$2x+2y=18 \quad \text{---------} (1)$$
$$2x-y=6 \quad \text{---------} (2)$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} 18 & 2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-18-12}{-2-4}$$

$$x=\frac{-18-12}{-2-4}=\frac{-30}{-6}$$
$$x=5$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 18 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{12-36}{-2-4}=\frac{12-36}{-2-4}=\frac{-24}{-6}=4$$

Entonces obtenemos que:

$$x=5$$
$$y=4$$

Los cuales son los mismos valores que obtuvimos por el método gráfico.

Problema

Una balsa navega en un río una distancia de 15 km. en 1.5 hrs siguiendo el curso de la corriente, y en contra de la corriente recorre 12 km. en 2 hrs. ¿Cuál será la velocidad de la balsa en contra de la corriente y cuál al seguir su curso?

Datos

Distancia siguiendo el curso =15 km
Tiempo siguiendo el curso =1.5 hrs
Distancia en contra del curso =12 km
Tiempo en contra del curso = 2 hrs.

LENGUAJE COMÚN	LENGUAJE ALGEBRAICO
Velocidad de la balsa	x
Velocidad de la corriente	y
Velocidad siguiendo la corriente	$x+y$
Velocidad contra la corriente	$x-y$
La velocidad es igual a la distancia sobre el tiempo	$v=\frac{d}{f}$
Por lo que la velocidad siguiendo el curso es igual a la distancia que recorrió sobre el tiempo que ocupó	$x+y=\frac{15\text{km}}{1.5\text{hrs}}$
Y la velocidad en contra del curso es igual a la distancia que recorrió sobre el tiempo que ocupó	$x-y=\frac{12\text{km}}{2\text{hrs}}$

Sistema de ecuaciones

$x+y=\frac{15}{1.5}$ - - - - - - - - - (1)

$x-y=\frac{12}{2}$ - - - - - - - - - (2)

Realizamos las operaciones en ambas ecuaciones.

$$x + y = 10 \quad \text{- - - - - - - - - (1)}$$
$$x - y = 6 \quad \text{- - - - - - - - - (2)}$$

Aplicamos el determinante para “x” y “y”.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-10-(6)}{-1-(1)} = \frac{-16}{-2} = 8$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{6-(10)}{-1-(1)} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Comprobamos los valores:

$$x + y = 10 \quad \text{- - - - - - - - - (1)}$$
$$8 + 2 = 10$$
$$10 = 10$$

$$x - y = 6 \quad \text{- - - - - - - - - (2)}$$
$$8 - 2 = 6$$
$$6 = 6$$

Por lo tanto:

Velocidad de balsa = 8 km/h
Velocidad de la corriente = 2 km/h
Velocidad siguiendo la corriente = 10 km/h
Velocidad contra la corriente = 6 km/h

Ahora analiza los siguientes ejemplos:

Sistema de ecuaciones

$$5x - 9y = 7 \quad \text{- - - - - - - - - (1)}$$
$$-8x + 10y = 2 \quad \text{- - - - - - - - - (2)}$$

Solución

$$x=\frac{\begin{vmatrix}7 & -9\\ 2 & 10\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & -9\\ -8 & 10\end{vmatrix}}=\frac{70-(-18)}{50-(72)}=\frac{70+18}{50-72}=\frac{88}{-22}=-4$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}5 & 7\\ -8 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & -9\\ -8 & 10\end{vmatrix}}=\frac{10-(-56)}{50-(72)}=\frac{10+56}{50-72}=\frac{66}{-22}=-3$$

Comprobación:

$5x-9y=7$ - - - - - - - - - (1)
$5(-4)-9(-3)=7$
$-20+27=7$
$7=7$

$-8x+10y=2$ - - - - - - - - - (2)
$-8(-4)+10(-3)=2$
$32-30=2$
$2=2$

Sistema de ecuaciones

$\frac{x-y}{3}+\frac{y}{6}=\frac{2}{3}$ - - - - - - - - - (1)
$22x+9(y-2x)=8$ - - - - - - - - - (2)

Procedimiento

Se realizan las operaciones necesarias para que las dos ecuaciones queden de la siguiente forma:

$ax+by=c$. - - - - - - - - - (1)
$\frac{x-y}{3}+\frac{y}{6}=\frac{2}{3}$
$6(\frac{x-y}{3}+\frac{y}{6}=\frac{2}{3})$
$\frac{6x-6y}{3}+\frac{6y}{6}=\frac{12}{3}$
$2x-2y+y=4$
$2x-y=4$ - - - - - - - - - (3)

$22x+9(y-2x)=8$ - - - - - - - - - (2)
$22x+9y-18x=8$
$4x+9y=8$ - - - - - - - - - (4)

Solución

Con las ecuaciones (3) y (4) aplicamos los determinantes para “x” y “y”.

$2x - y = 4$ - - - - - - - - - (1)

$4x + 9y = 8$ - - - - - - - - - (2)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{36-(-8)}{18-(-4)} = \frac{44}{22} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{16-(16)}{22} = \frac{0}{22} = 0$$

Comprobación:

$2x - y = 4$ - - - - - - - - - (3)

$2(2) - 0 = 4$

$4 - 0 = 4$

$4 = 4$

$4x + 9y = 8$ - - - - - - - - - (4)

$4(2) + 9(0) = 8$

$8 + 0 = 8$

$8 = 8$

Hasta aquí hemos analizado el procedimiento para solucionar un sistema de ecuaciones con dos incógnitas.

Ahora revisaremos la solución de problemas que dan lugar a sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas; para lo cual aplicaremos el método de determinantes.

La ecuación lineal general con tres incógnitas es de la forma:

$$ax + by + cz = d$$

Como el sistema se forma por tres ecuaciones lineales debemos utilizar subíndices en los coeficientes y en la constante para distinguirlas:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

Ahora formamos el determinante del sistema con los coeficientes de las incógnitas:

$$\text{denominador} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Para desarrollarlo, repetimos abajo de la tercera fila, las dos primeras y se resuelve:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

Obtenemos el determinante para "x" sustituyendo los valores "a" por los valores de "d"

$$\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \\ d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = d_1b_2c_3 + d_2b_3c_1 + d_3b_1c_2 - d_3b_2c_1 - d_1b_3c_2 - d_2b_1c_3$$

Obtenemos el determinante para la "y" sustituyendo los valores de "b" por los de "d"

$$\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \\ a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1d_2c_3 + a_2d_3c_1 + a_3d_1c_2 - a_3d_2c_1 - a_1d_3c_2 - a_2d_1c_3$$

Obtenemos el determinante para “z” sustituyendo los valores “c” por los valores “d”

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{vmatrix} = a_1b_2d_3 + a_2b_3d_1 + a_3b_1d_2 - a_3b_2d_1 - a_1b_3d_2 - a_2b_1d_3$$

Entonces obtenemos que para encontrar los valores de “x”, “y” y “z” tenemos los determinantes:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \\ d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \\ a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}$$

Observa que el denominador de las tres variables es el mismo y que en el numerador la constante sustituye al coeficiente de la incógnita que se está buscando.

Otro aspecto que es importante puntualizar, es que en la resolución de los determinantes los productos que van “hacia abajo” son positivos y los que van “hacia arriba” son negativos.

Ejemplos:

Ahora apliquemos estos determinantes en los siguientes problemas:

Problema

La suma de tres términos es 160; la cuarta parte de la suma del mayor y el mediano equivale al menor menos 20. Si la mitad de la diferencia del mayor menos el menor se le suma el número de en medio se obtiene 57. ¿Cuáles son cada uno de los números?

Datos

LENGUAJE COMÚN	LENGUAJE ALGEBRAICO
La suma de tres números es 160	$x + y + z = 160$
Número menor	x
Número mediano	y
Número mayor	z
La cuarta parte de la suma del mayor y mediano equivale al menor menos 20	$\frac{z+y}{4} = x - 20$
La mitad de la diferencia del mayor menos el menor se le suma el número mediano se obtiene 57	$\frac{z-x}{2} + y = 57$

Sistema de ecuaciones

$x + y + z = 160$ - - - - - - - - - (1)

$\frac{z+y}{4} = x - 20$ - - - - - - - - - (2)

$\frac{z-x}{2} + y = 57$ - - - - - - - - - (3)

Procedimiento

Se hacen las operaciones necesarias para obtener ecuaciones de la forma $ax + by + cz = d$

$\frac{z+y}{4} = x - 20$ - - - - - - - - - (2)

$4(\frac{z+y}{4} = x - 20)$

$\frac{4z+4y}{4} = 4x - 80$

$z + y = 4x - 80$

$-4x + z + y = -80$ - - - - - - - - - (4)

$\frac{z-x}{2} + y = 57$ - - - - - - - - - (3)

$2(\frac{z-x}{2} + y = 57)$

$\frac{2z-2x}{2} + 2y = 114$

$z - x + 2y = 114$

$-x + 2y + z = 114$ - - - - - - - - - (5)

Entonces el sistema a resolver es:

$x + y + z = 160$ - - - - - - - - - (1)

$-4x + y + z = -80$ - - - - - - - - - (4)

$-x + 2y + z = 114$ - - - - - - - - - (5)

Aplicamos los determinantes para “x”, “y” y “z”:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}160 & 1 & 1\\ -80 & 1 & 1\\ 114 & 2 & 1\\ 160 & 1 & 1\\ -80 & 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -4 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -4 & 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{160+(-160)+114-114-320-(-80)}{1+(-8)+(-1)-(-1)-2-(-4)}$$

$$\mathbf{x}=\frac{\cancel{160}-\cancel{160}+\cancel{114}-\cancel{114}-320+80}{1-8-1+1-2+4}$$

$$x=\frac{-320+80}{-7-2+4}$$

$$x=\frac{-240}{-9+4}$$

$$x=\frac{-240}{-5}$$

$$x=48$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 160 & 1\\ -4 & -80 & 1\\ -1 & 114 & 1\\ 1 & 160 & 1\\ -4 & -80 & 1\end{vmatrix}}{-5}=\frac{-80+(-456)+(-160)-80-114-(-640)}{-5}$$

$$y=\frac{-80-456-160-80-114+640}{-5}$$

$$y=\frac{-536-240+526}{-5}$$

$$y=\frac{-776+526}{-5}$$

$$y=\frac{-250}{-5}$$

$$y=50$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 160\\ -4 & 1 & -80\\ -1 & 2 & 114\\ 1 & 1 & 160\\ -4 & 1 & -80\end{vmatrix}}{-5}=\frac{114+(-1280)+80-(-160)-(-160)-(-456)}{-5}$$

$$z=\frac{114-1280+80+160+160+456}{-5}$$

$$z=\frac{-1166+856}{-5}$$

$$z=\frac{-310}{-5}$$

$$z=62$$

Entonces obtenemos que:

El número menor = $x=48$
El número medio = $y=50$
El número mayor = $z=62$

Comprobación

$x+y+z=160$ - - - - - - - - - - (1)

$48+50+62=160$

$160=160$

$\frac{z+y}{4}=x-20$ - - - - - - - - - - (2)

$\frac{62+50}{4}=48-20$

$28=28$

$\frac{z-x}{2}+y=57$ - - - - - - - - - - (3)

$\frac{62-48}{2}+50=57$

$7+50=57$

$57=57$

Problema

La suma de las tres cifras de un número es 16. La suma de las cifras de las centenas y la cifra de las decenas es el triple de la cifra de las unidades, y si al número se le resta 99, las cifras se invierten. Hallar el número.

LENGUAJE COMÚN	LENGUAJE ALGEBRAICO
Cifra de las centenas	x
Cifra de las decenas	y
Cifra de las unidades	z
La suma de las tres cifras es 16	$x+y+z=16$
La suma de la cifra de las centenas y la cifra de las decenas es el triple de la cifra de las unidades	$x+y=3z$
Si al número se le resta 99 las cifras se invierten	$100x+10y+z-99=100z+10y+x$

Sistema de ecuaciones

$x+y+z=16$ - - - - - - - - - (1)

$x+y=3z$ - - - - - - - - - (2)

$100x+10y+z-99=100z+10y+x$ - - - - - - - - - (3)

Procedimiento

Ordenamos los datos

$x+y=3z$ - - - - - - - - - (2)

$x+y-3z=0$ - - - - - - - - - (4)

$100x+10y+z-99=100z+10y+x$ - - - - - - - - - (3)

$100x-x+10y-10y+z-100z=99$

$99x-99z=99$ - - - - - - - - - (5)

Trabajaremos con el sistema de ecuaciones:

$$x + y + z = 16 \qquad \text{---------} \, (1)$$
$$x + y - 3z = 0 \qquad \text{---------} \, (4)$$
$$99x - 99z = 99 \qquad \text{---------} \, (5)$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 16 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 99 & 0 & -99 \\ 16 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 99 & 0 & -99 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{(-1584 + 0 - 297) - (99 + 0 + 0)}{(-99 + 0 - 297) - (99 + 0 - 99)}$$

$$x = \frac{-1584 + 0 + (-297) - 99 - 0 - 0}{-99 + 0 + (-297) - 99 - 0 - (-99))}$$

$$x = \frac{-1584 - 297 - 99}{-99 - 297 - 99 + 99}$$

$$x = \frac{-1980}{-396}$$

$$x = 5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 16 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 99 & 99 & -99 \\ 1 & 16 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{-396} = \frac{0 + 99 + (-4752) - 0 - (-297) - (-1584)}{-396}$$

$$y = \frac{99 - 4752 + 297 + 1584}{-396}$$

$$y = \frac{-4653 + 1881}{-396}$$

$$y = \frac{-2772}{-396}$$

$$y = 7$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 16\\ 1 & 1 & 0\\ 99 & 0 & 99\\ 1 & 1 & 16\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}}{-396}=\frac{99+0+0-1584-0-99}{-396}$$

$$z=\frac{\cancel{99}-1584-\cancel{99}}{-396}$$

$$z=\frac{-1584}{-396}$$

$$z=4$$

Entonces obtenemos que:

Cifra de las centenas = $x=5$
Cifra de las decenas = $y=7$
Cifra de las unidades = $z=4$

Comprobación

$$\begin{aligned} x+y+z&=16 \quad \text{---------- (1)}\\ 5+7+4&=16\\ 16&=16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y&=3z \quad \text{---------- (2)}\\ 5+7&=3(4)\\ 12&=12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 100x+10y+z-99&=100z+10y+x \quad \text{---------- (3)}\\ 100(5)+10(7)+4-99&=100(4)+10(7)+5\\ 500+70+4-99&=400+70+5\\ 475&=475 \end{aligned}$$

Sistema de ecuaciones

$x+2y-z=-3$ ---------- (1)
$3x+y+z=4$ ---------- (2)
$x-y+2z=6$ ---------- (3)

Procedimiento

Como están ordenadas las tres ecuaciones, aplicamos directamente los determinantes.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-6+4+12-(-6)-3-16}{2+3+2-(-1)-(-1)-12}$$

$$x = \frac{-6+4+12+6-3-16}{2+3+2+1+1-12}$$

$$x = \frac{16-19}{9-12}$$

$$x = \frac{-3}{-3}$$

$$x = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{8+(-18)+(-3)-(-4)-6-(-18)}{-3}$$

$$y = \frac{8-\cancel{18}-3+4-6+\cancel{18}}{-3}$$

$$y = \frac{5-2}{-3}$$

$$y = \frac{3}{-3}$$

$$y = -1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 6\\ 1 & 2 & -3\\ 3 & 1 & 4\end{vmatrix}}{-3}=\frac{6+9+8-(-3)-(-4)-36}{-3}$$

$$z=\frac{6+9+8+3+4-36}{-3}$$

$$z=\frac{30-36}{-3}$$

$$z=\frac{-6}{-3}$$

$$z=2$$

Entonces obtenemos que:

$$x=1$$
$$y=-1$$
$$z=2$$

Comprobamos

$$\begin{aligned} x+2y-z &= -3 \quad \text{---------- (1)}\\ 1+2(-1)-2 &= -3\\ 1-2-2 &= -3\\ 1-4 &= -3\\ -3 &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x+y+z &= 4 \quad \text{---------- (2)}\\ 3(1)+(-1)+2 &= 4\\ 3-1+2 &= 4\\ 2+2 &= 4\\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-y+2z &= 6 \quad \text{---------- (3)}\\ 1-(-1)+2(2) &= 6\\ 1+1+4 &= 6\\ 6 &= 6 \end{aligned}$$

Sistema de ecuaciones

$$x+2y+3z=5 \quad \text{---------- (1)}$$
$$3x-y=-3 \quad \text{---------- (2)}$$
$$-4x+z=6 \quad \text{---------- (3)}$$

Observa que a las ecuaciones (2) y (3) les hace falta una variable y por lo tanto consideramos sus coeficientes como cero:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-5+0+0+18-0+6}{-1+0+0-12-0-6}$$

$$x = \frac{-5+18+6}{-1-12-6}$$

$$x = \frac{19}{-19}$$

$$x = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \\ -4 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{-19} = \frac{-3+54+0-36-0-15}{-19}$$

$$y = \frac{-3+54-36-15}{-19}$$

$$y = \frac{51-51}{-19}$$

$$y = \frac{0}{-19}$$

$$y = 0$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ 3 & -1 & -3\\ -4 & 0 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 3 & -1 & -3\end{vmatrix}}{-19}=\frac{-6+0+24-20-0-36}{-19}$$

$$z=\frac{-6+24-20-36}{-19}$$

$$z=\frac{18-56}{-19}$$

$$z=\frac{-38}{-19}$$

$$z=2$$

Por lo tanto:

$x = -1$

$y = 0$

$z = 2$

Comprobación

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=5 \quad \text{- - - - - - - - - (1)}\\ -1+2(0)+3(2)&=5\\ -1+6&=5\\ 5&=5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x-y&=-3 \quad \text{- - - - - - - - - (2)}\\ 3(-1)-0&=-3\\ -3&=-3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4x+z&=6 \quad \text{- - - - - - - - - (3)}\\ -4(-1)+2&=6\\ 4+2&=6\\ 6&=6 \end{aligned}$$

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

A fin de que ejercites la aplicación de los métodos analíticos, resuelve los problemas y los sistemas de ecuaciones por el método que se indica.

Por el método de suma o resta.

1. $\begin{array}{l} 2x + y = 16 \\ y = 25 - 5x \end{array}$

2. $\begin{array}{l} x - 2y = 7 \\ 3x + y = 35 \end{array}$

3. $\begin{array}{l} x = y + 8 \\ x + 3y = 48 \end{array}$

4. $\begin{array}{l} y = 2x \\ 7x - y = 35 \end{array}$

5. $\begin{array}{l} x - y = 12 \\ 3x = 1 - 4y \end{array}$

6. $\begin{array}{l} 7a + b = 22 \\ 5a + b = 14 \end{array}$

7. $\begin{array}{l} 3k + 5p = 9 \\ 3k - p = -9 \end{array}$

8. $\begin{array}{l} 7a + t = 42 \\ 3a - t = 8 \end{array}$

9. $\begin{array}{l} \frac{4}{5}r - \frac{1}{4}s = 11 \\ \frac{3}{5}r - \frac{1}{4}s = 18 \end{array}$

10. $\begin{array}{l} x - y = 17 \\ \frac{4}{3}x + \frac{3}{2}y = 0 \end{array}$

Por el método de sustitución

11. $\begin{array}{l} 2x + y = 16 \\ y = 25 - 5x \end{array}$

12. $\begin{array}{l} x - 2y = 7 \\ 3x + 4y = 35 \end{array}$

13. $\begin{array}{l} x = y + 8 \\ x + 3y = 48 \end{array}$

14. $\begin{array}{l} y = 2x \\ 7x - y = 35 \end{array}$

15. $\begin{array}{l} x - y = 12 \\ 3x = 1 - 4y \end{array}$

16. $\begin{array}{l} 7a + b = 22 \\ 5a + b = 14 \end{array}$

17. $\begin{array}{l} 3k + 5p = 9 \\ 3k - p = -9 \end{array}$

18. $\begin{array}{l} 7a + t = 42 \\ 3a - t = 48 \end{array}$

19. $\begin{array}{l} \frac{4}{5}r - \frac{1}{4}s = 11 \\ \frac{3}{5}r - \frac{1}{4}s = 18 \end{array}$

20. $\frac{4}{3}x + \frac{3}{2}y = 0$

Por el método de igualación

21. $\begin{aligned} 2x + y &= 16 \\ y &= 25 - 5x \end{aligned}$

22. $\begin{aligned} x - 2y &= 7 \\ 3x + y &= 35 \end{aligned}$

23. $\begin{aligned} x &= y + 8 \\ x + 3y &= 48 \end{aligned}$

24. $\begin{aligned} y &= 2x \\ 7x - y &= 35 \end{aligned}$

25. $\begin{aligned} x - y &= 12 \\ 3x &= 1 - 4y \end{aligned}$

26. $\begin{aligned} 7a + b &= 22 \\ 5a + b &= 14 \end{aligned}$

27. $\begin{aligned} 3k + 5p &= 9 \\ 3k - p &= -9 \end{aligned}$

28. $\begin{aligned} 7a + t &= 42 \\ 3a - t &= 8 \end{aligned}$

29. $\begin{aligned} 4/5r - 1/4s &= 11 \\ 3/5r - 1/4s &= 8 \end{aligned}$

30. $\begin{aligned} x - y &= 17 \\ \frac{4}{3}x + \frac{3}{2}y &= 0 \end{aligned}$

Por el método de determinantes

31. Si a cinco veces el mayor de dos números se le añade siete veces el menor, la suma es 316, y si a nueve veces el menor se le resta el cuádruplo del mayor, la diferencia es 83. Hallar los números.

32. Si el mayor de dos números se divide por el menor, el cociente es dos y el residuo cuatro, y cinco veces el menor se divide entre el mayor, el cociente es dos y el residuo 17. Hallar los números.

33. Si al mayor de dos números se le añade siete veces el menor la suma es 316, y si a nueve veces el menor se le resta el cuádruplo del mayor, la diferencia es 83. Hallar los números.

34. Si el mayor de dos números se divide entre el menor, el cociente es dos y el residuo cuatro, y si cinco veces el menor se divide entre el mayor, el cociente es dos y el residuo 17. Halla los números.

35. $\begin{aligned} -5x + y &= 3 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$

36. $\begin{aligned} 8x - 9y &= 6 \\ 2x + 5y &= 4 \end{aligned}$

37. $\begin{aligned} 5(x + y) - \frac{y + 2}{5} &= 4 \\ \frac{x - 23}{3} - y + 2x &= 0 \end{aligned}$

38. Daniel tiene $575 dólaeres en billetes de uno, cinco y diez dólares. En total posee 95, el número de los billetes de un dólar más el número de los billetes de cinco dólares corresponden a cinco unidades más que el doble del número de los billetes de diez dólares. ¿Cuántos billetes de cada tipo tiene Daniel?.

39. La suma de tres números da 33, el mayor tiene dos unidades menos que el doble del menor, el triple del número menor corresponde a una unidad menos que la suma de otros dos números. Encuentra los tres.

EXPLICACIÓN INTEGRADORA

En este tema, aprendiste a resolver problemas que dan lugar a un sistema de ecuaciones, con dos o tres incógnitas; los métodos que aplicaste son:

MÉTODO ANALÍTICO
- POR ELIMINACIÓN
  - SUMA O RESTA
  - SUSTITUCIÓN
  - IGUALACIÓN
- POR DETERMINANTES

Para aplicar cualquier método debemos.

- Identificar los datos conocidos.
- Identificar los datos desconocidos
- Traducir el problema del lenguaje común, al lenguaje algebraico.
- Construir nuestro sistema de ecuaciones simultaneas

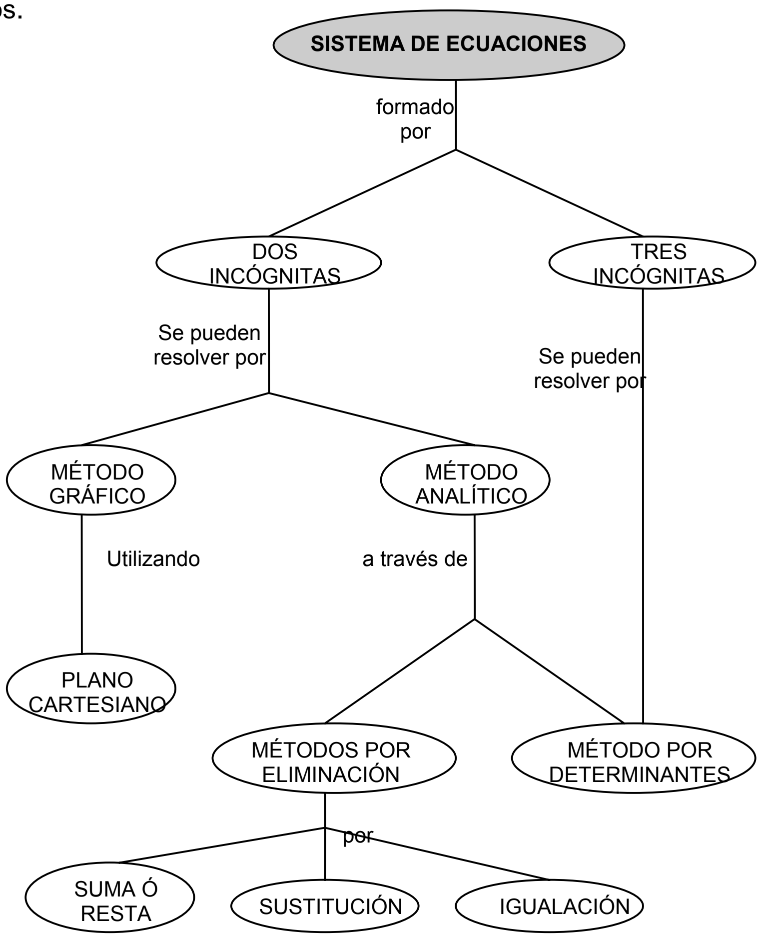
A partir de aquí, debemos seleccionar el método por el que solucionaremos el sistema y aplicar los pasos correspondientes. Observa la tabla 1

POR SUMA Y RESTA	POR SUSTITUCIÓN	POR IGUALACIÓN	POR DETERMINANTES
i. Ordenar las ecuaciones. ii. Si es necesario, multiplicar una de las ecuaciones por el coeficiente de una de las variables de la otra ecuación. iii. Sumar o restar las ecuaciones. iv. Resolver la ecuación que resulta. v. Sustituir el valor de la variable en una de las ecuaciones iniciales. vi. Comprobar los valores encontrados	i. Despejar una de las variables en cualquiera de las ecuaciones. ii. Sustituir en la otra ecuación la variable despejada. iii. Resolver la ecuación. iv. Sustituir el valor de la variable en la ecuación despejada. v. Comprobar los valores encontrados.	i. Despejar en ambas ecuaciones la misma variable. ii. Igualar las ecuaciones despejadas y solucionar la igualación. iii. Sustituir el valor encontrado en una de las ecuaciones despejadas. iv. Comprobar los valores.	i. Si es necesario hacer las operaciones para que las ecuaciones queden de la forma $ax + by = c$ ó $ax + by + cz = d$

Tabla 1

RECAPITULACIÓN

El esquema que aparece a continuación, incluye los conceptos más importantes que se analizaron en este capítulo y tiene la finalidad de que verifiques la comprensión de cada uno de ellos.



Recuerda que para solucionar un sistema de ecuaciones puedes aplicar cualquiera de estos métodos, y siempre llegarás a los mismos resultados.

Señala en el esquema el método que te parezca más sencillo y argumenta tus razones en el siguiente espacio:

ACTIVIDADES INTEGRALES

Estos ejercicios han sido preparados para que apliques lo aprendido en este capítulo. Debe resolverlos puesto que reafirmarán tu aprendizaje.

a) Establece el modelo algebraico y la solución de los siguientes problemas:

1. El costo total de cinco libros de texto y cuatro cuadernos de trabajo es de $648.00; el costo de otros seis libros de texto iguales y tres cuadernos es de $756.00. ¿Cuál es el costo de cada artículo?.

2. En Inglaterra, 12 libras de papas y seis de arroz cuestan 7.32 dólares, mientras que nueve libras de papas y 13 de arroz cuestan 9.23 dólares. ¿Cuál es el precio por libra de cada producto?.

3. Cuando una persona maneja de su casa al trabajo a 60 km/h, llega cuatro minutos antes de lo normal y cuando lo hace a 40 km/h llega seis minutos después de lo usual. ¿Cuál es la distancia de la casa a su oficina, la velocidad a la que normalmente conduce y el tiempo que tarda en el recorrido?.

b) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por determinantes.

1. $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -4x + 10y = 8 \\ 11x - 9y = 15 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 9x - 12 = 4y \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x - 2y = 7 \\ -x + 2y = -9 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{4x+y}{2} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{3x-y}{6} \\ \dfrac{5}{3} - \dfrac{2y-x}{3} = 2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} (x-3)^2 + (y-8)^2 = (x-2)^2 + (y-7)^2 + 2 \\ x^2 + y^2 = (x-1)^2 + (y-3)^2 + 3y \end{cases}$

c) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas por determinantes.

1. $\begin{cases} x + y + z = 11 \\ x - y + 3z = 13 \\ 2x + 2y - z = 7 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 4x + z = -28 \\ x + 2y + 3z = -43 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + y = 2z + 3 \\ x - y = 1 \\ x + z = \dfrac{y}{4} + 11 \end{cases}$

AUTOEVALUACIÓN

A continuación se proporcionan los resultados que debiste obtener.

a) Problemas

Libros x

Cuadernos y $\therefore \begin{cases} 5x + 4y = 648 \\ 6x + 3y = 756 \end{cases}$

$$\left(x = \frac{\begin{vmatrix} 648 & 4 \\ 756 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{1944 - 3024}{15 - 24} = \frac{-1080}{-9} \right) = 120$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 648 \\ 6 & 756 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{3780 - 3888}{-9} = \frac{-108}{-9}$$

$$y = 12$$

Por lo tanto, cada libro cuesta \$120.00 y cada cuaderno \$12.00

2. papas = p, arroz = a $\begin{cases} 12p + 6a = 7.32 \\ 9p + 13a = 9.23 \end{cases}$

$$p = \frac{\begin{vmatrix} 7.32 & 6 \\ 9.23 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 9 & 13 \end{vmatrix}} = \frac{95.16 - 55.38}{156 - 54} = \frac{39.78}{102} = 0.39$$

$$12(0.39) + 6a = 7.32$$
$$6a = 7.32 - 4.68$$
$$6a = 2.64$$
$$a = 2.64 / 6$$
$$a = 0.44$$

$\therefore$ CADA LIBRA DE PAPA CUESTA 0.39 DLS. Y CADA LIBRA DE ARROZ 0.44 DLS.

3. $v = 60km / h$ $\qquad t = t - 4$ Ecuación (1)

$d = ?$

$v = 40km / h$ $\qquad t = t + 6 \quad 40km / h = d / t + 6$ Ecuación (2)

Recuerda que la expresión algebraica (fórmula) utilizada para determinar la velocidad es igual a la distancia sobre el tiempo.

$v = d / t$

$d = vt$

$t = d / v$

Como el tiempo está dado en minutos y hay que expresarlo en horas se obtiene:

-4 minutos = -4/60 horas
6 minutos = 6/60 horas

Obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$60 = \frac{d}{t - \frac{4}{60}}$$

$$40 = \frac{d}{t + \frac{6}{60}}$$

Despejar el tiempo.

$$t - \frac{4}{60} = \frac{d}{60}$$

$$t = \frac{d}{60} + \frac{4}{60} \qquad \text{Ecuación (3)}$$

$$t + \frac{6}{60} = \frac{d}{40}$$

$$t = \frac{d}{40} - \frac{6}{60} \qquad \text{Ecuación (4)}$$

$d + 4 = 60t$ Multiplicar por 60 la ecuación (3) para eliminar denominadores.

$3d - 12 = 120t$ Multiplicar por 120 la ecuación (4)

$d = 60t - 4$ Despejar la ecuación (3)

$3(60t - 4) - 12 = 120t$ Sustituir la ecuación (4)

$180t - 12 - 12 = 120t$ Efectuar operaciones.

$$
\begin{aligned}
-24 &= 120t - 180t \\
-24 &= -60t \\
-24 / -60 &= t \\
-2 / -5 &= t
\end{aligned}
$$

El tiempo normal son 2/5 de hora, que multiplica dos por 60 obtenemos el tiempo expresado en minutos.

$2 / 5(60) = 24$

$t = 24$ minutos

Sustituir el tiempo en la expresión $d + 4 = 60t$, o bien $3d - 12 = 120t$.

$$
\begin{aligned}
d &= 60(2/5) - 4 \\
d &= 24 - 4 \\
d &= 20\,\text{km}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3d - 12 &= 120t \\
3d &= 120t + 12 \\
d &= \frac{120t + 12}{3} \\
d &= \frac{120\left(\frac{2}{5}\right) + 12}{3} \\
d &= \frac{48 + 12}{3} = \frac{60}{3} = 20\text{km} \\
d &= 20\ \text{km}
\end{aligned}
$$

Hasta el momento has encontrado el tiempo usual y distancia que se recorre normalmente, por lo tanto, encontrar la velocidad promedio a la que normalmente se conduce se utiliza la expresión:

$v = d / t;\ v = 20 / 1 \quad / \quad 2 / 5 = 100 / 2 = 50\ \text{km} / \text{h}.$

Comprobación

Distancia diaria de 20 km.

Tiempo usual es de 2/5 h es decir, 24 minutos.

Si viaja a 60 km/h, la distancia de 20 km la recorre en:

$v = d / t; \quad t = d / v = 20 / 60 = 1 / 2\,\text{h};$ es decir, 30 minutos

Como se puede observar arriba 4 minutos después de lo usual.

b) Soluciones.

1. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{7} \\ y = \dfrac{1}{7} \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ La ecuación 1 la multiplicamos por (-1) para quitar el término negativo (-4x).

3. $\begin{cases} x = \dfrac{6}{5} \\ y = \dfrac{-3}{10} \end{cases}$ En la ecuación 1 aplicamos el elemento inverso aditivo.

4. $\begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{-29}{6} \end{cases}$

5. Para cada una de las ecuaciones busca su m.c.m. y multiplica ambos miembros de la ecuación por m.c.m. Establece las operaciones indicadas y reduce términos semejantes, aplicando las propiedades de campo de los números reales

$x = 1$
$y = 0$

6. Para la solución se efectúan los productos notables (binomios elevados al cuadrado) en ambas ecuaciones.

El sistema a resolver queda:

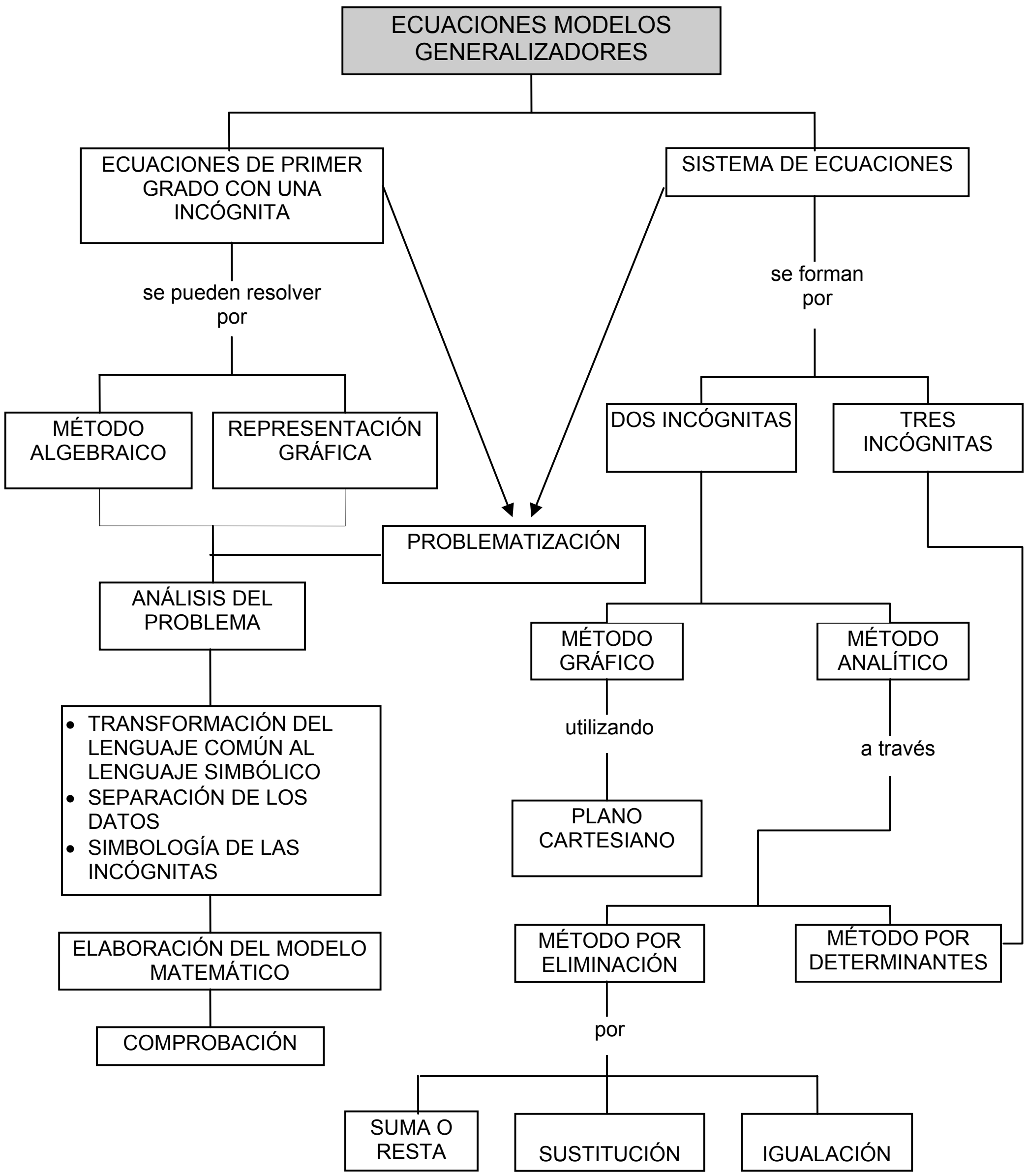
$$\begin{aligned} -2x - 2y &= -18 \\ 2x + 3y &= 10 \end{aligned} \quad \text{y la solución es} \quad \begin{aligned} x &= 17 \\ y &= -8 \end{aligned}$$

c)

1. $x = 2$, $y = 4$, $z = 5$
2. $x = -5$, $y = -7$, $z = -8$
3. $x = 9$, $y = 8$, $z = 4$

RECAPITULACIÓN GENERAL

Observa detenidamente el esquema que te ayudará a que recuerdes lo que estudiaste en ambos capítulos



ACTIVIDADES DE CONSOLIDACIÓN

Resuelve los siguientes ejercicios considerando los temas que revisaste en el fascículo y aplicando cada uno de los métodos para su solución

1) Determina la solución de las siguientes ecuaciones y sistemas de ecuaciones aplicando el método algebraico.

A) $x - 8 = -12$

B) $\frac{x}{5} - 1 = 9$

C) $-12x + 8 + 13x = 0$

D) $3x + 9 = -5x + 6$

E) $-2x + 1 = -3(x - 1)$

F) $x - (2x + 1) = 8 - (3x + 3)$

G) $10 - 6x + 2x = -2x$

H) $\frac{2}{3}\left[1 + \frac{1}{4}x\right] - 1 = x - \frac{1}{3}\left[2x + \frac{1}{6}x\right]$

I) $\begin{array}{l} x - y = -4 \\ 3x - y = 0 \end{array}$ (por suma o resta)

J) $\begin{array}{l} 12x - 14y = 20 \\ 12y - 14x = -19 \end{array}$ (por suma y resta)

K) $\begin{array}{l} 4y + 3x = 8 \\ 8x - 9y = -77 \end{array}$ (por sustitución)

L) $\begin{array}{l} x - y = 8 \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = 1 \end{array}$ (por sustitución)

LL) $\begin{array}{l} 6x - 18y = -85 \\ 24x - 5y = -5 \end{array}$ (por igualación)

M) $$\begin{aligned} \frac{3}{2}x + y &= 11 \\ x + \frac{1}{2}y &= 7 \end{aligned}$$ (por determinante)

N) $3x + y + z = 1$
$x + 2y - z = 1$
$x + y + 2z = -17$ (por determinantes)

2) Representa gráficamente las ecuaciones de los incisos A); D); F); I); J); Y LL):

3) Plantea el modelo algebraico y determina la solución de los siguientes problemas

A) Durante una venta especial, Araceli vendió 19 capas para dama más que la mitad de las que vendió Jazmín. Si entre ambas vendieron 157 capas ¿cuántas vendieron cada una?

B) La base de un triángulo tiene la misma longitud que el lado de un cuadrado. El segundo lado del triángulo es 2 cm más largo que la base y el tercer lado es 6cm más largo que dicha base. Si el perímetro del triángulo es igual al del cuadrado. Hallar la longitud del lado mayor del triángulo

C) El largo de un parque de juegos excede en 25 m al doble de su ancho y se necesitan 650 m de malla de alambre para cercarlo. Hallar sus dimensiones.

D) La renta y los ahorros del Sr. González hacen un total mensual de $1,000.00. Si ahorrará $50.00 más al mes, sus ahorros serán la mitad de su renta. ¿Cuál es su renta?

E) Un equipo de béisbol compró 7 bates y 5 pelotas en $590.00. Después compró 3 bates y 6 pelotas en $330.00 ¿cuál es el precio de cada objeto?

F) El promedio de 2 números es 5/48. Un cuarto de su diferencia es 1/96. Hallar los dos números.

AUTOEVALUACIÓN

A continuación se proporcionan los resultados de las actividades de consolidación para que puedas compararlos con las soluciones que obtuviste:

1.

A) $x = -4$

B) $x = 50$

C) $x = -8$

D) $x = -\frac{3}{8}$

E) $x = 2$

F) $x = 3$

G) $x = 5$

H) $x = -3$

I) $x = 2;\ y = 6$

J) $x = \frac{1}{2};\ y = -1$

K) $x = -4;\ y = 5$

L) $x = 18;\ y = 10$

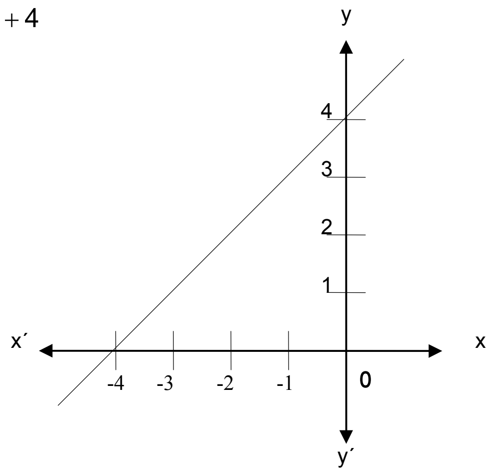
LL) $x = \frac{5}{6};\ y = 5$

M) $x = 6;\ y = 2$

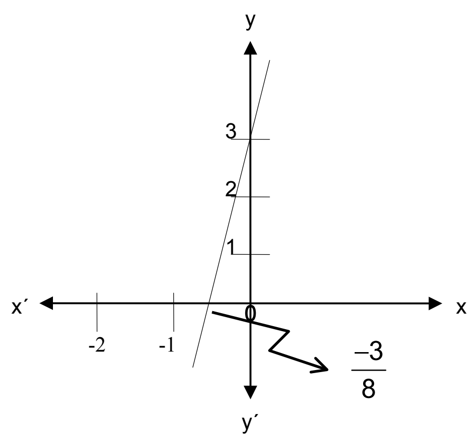
N) $x = 5;\ y = -6;\ z = -8$

2.

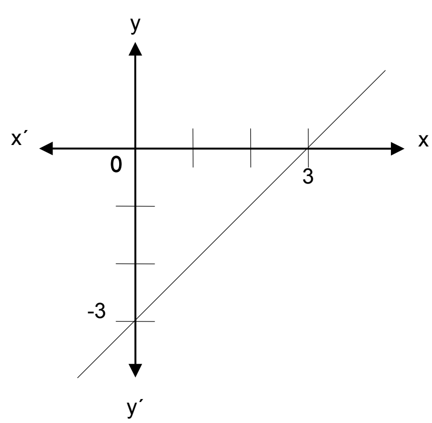
A) $y = x + 4$



D) $y = 8x + 3$

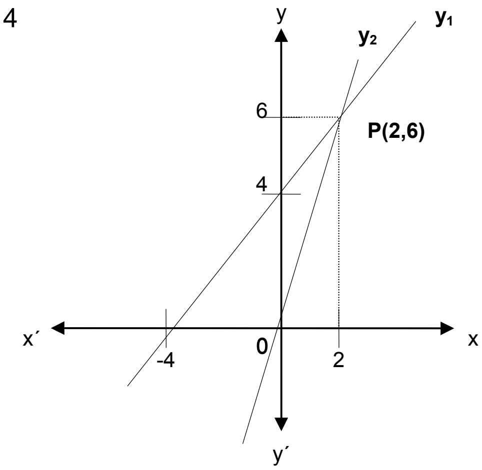


F) $y = x - 3$



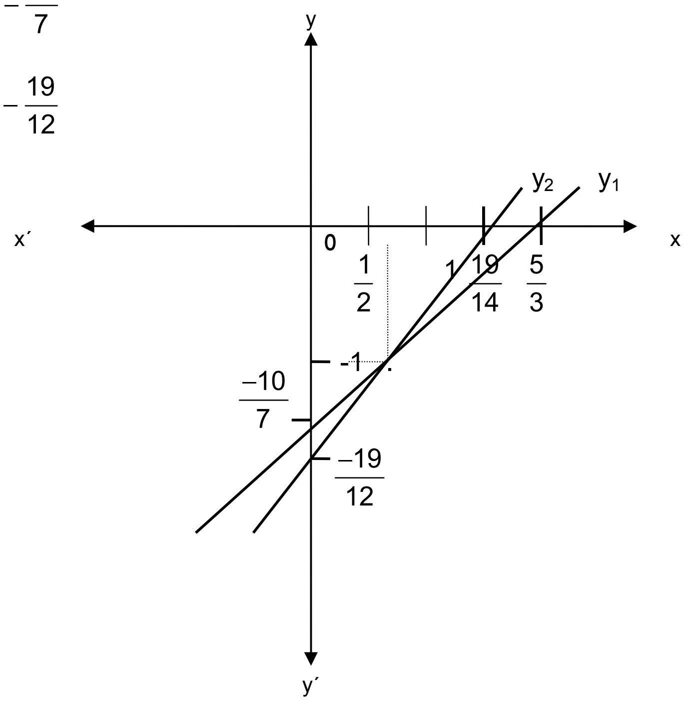
I) $y_1 = x + 4$

$y_2 = 3x$



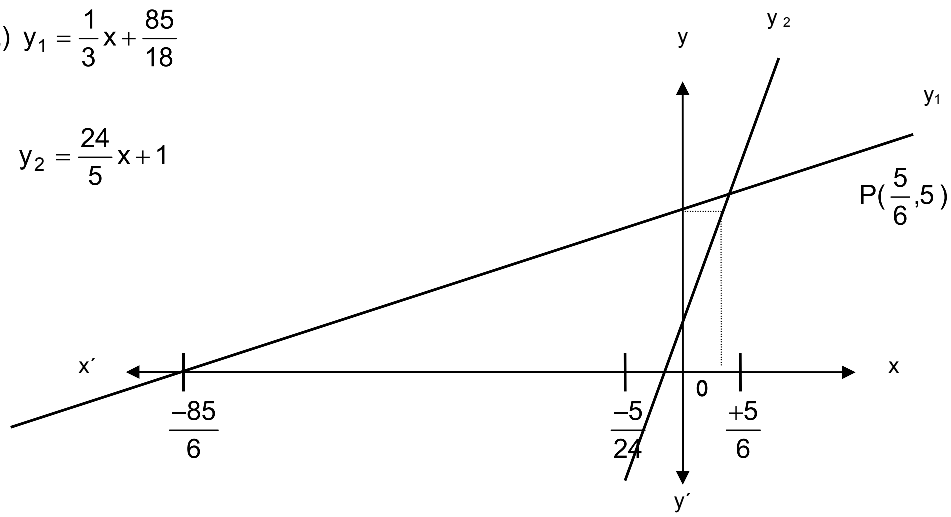
J) $y_1 = \frac{6}{7}x - \frac{10}{7}$

$y_2 = \frac{7}{5}x - \frac{19}{12}$



LL) $y_1 = \frac{1}{3}x + \frac{85}{18}$

$y_2 = \frac{24}{5}x + 1$



3.

A) Modelo = $x+\left[\frac{1}{2}x+19\right]=157$

Araceli vendió 65 capas
Jazmín vendió 92 capas

B) Modelo = $x+(x+2)+(x+6)=4x$

Longitud del lado mayor del triángulo: 14 cm.

C) Modelo = $2(2x+25)+2x=650$

Dimensiones: largo 225 m; ancho 100 m.

D) Modelo = $\begin{cases} x+y=1000 \\ y+50=\dfrac{x}{2} \end{cases}$

Renta: \$700.00

E) Modelo = $\begin{matrix} 7x+5y=590 \\ 3x+6y=330 \end{matrix}$

Bate: \$70.00
Pelota: \$20.00

F) Modelo = $\begin{matrix} \dfrac{x+y}{2}=\dfrac{5}{48} \\ \dfrac{x-y}{4}=\dfrac{1}{96} \end{matrix}$

Números: $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{12}$

ACTIVIDADES DE GENERALIZACIÓN

Al aplicar los conocimientos que adquiriste trata de resolver las siguientes situaciones para reafirmar tu aprendizaje sobre este tema.

a) Observa y anota como se utilizan las ecuaciones para representar reacciones químicas.

b) Elabora un ejemplo.

Recuerda que las ecuaciones tienen muchas aplicaciones para resolver problemas de otras áreas y de tu vida cotidiana.

GLOSARIO

Este apartado te ayudará a que puedas conocer el significado de algunos términos que se utilizaron a lo largo del fascículo.

Ecuación: Es un tipo de igualdad que se satisface para ciertos valores.

Ecuaciones equivalentes: Dos o más ecuaciones que admiten la misma solución

Ecuación lineal: Es una que representa la expresión de una función lineal

Ecuación numérica: Es la ecuación en cuyos términos no existen más letras que las correspondientes a las incógnitas

Grado de una ecuación: Es el valor del exponente mayor que aparece en las incógnitas de la ecuación.

Igualdad: Es una expresión algebraica compuesta por dos miembros separados por el signo " = " .

Incógnitas: Son las letras que figuran en la ecuación y de cuyo valor depende que se cumpla con la igualdad.

BIBLIOGRAFIA

A continuación encontrarás algunos títulos de textos que te ayudarán al estudio del fascículo.

ALLENDOERFER, C. B. y Oakley, C O.: Fundamentos de Matemáticas Universitarias. Colombia, McGraw Hill, 1973.

ANFOSSI, A.: Álgebra**.**

BALDOR, A.: Álgebra elemental**.** Ediciones y Distribuciones Códice, España, 1981.

BARNETT, Rich.: Álgebra elemental. Mc. Graw-Hill, México, 1969.

CABALLERO et al. : Matemáticas**.** Esfinge, México 1957.

CROWHURST: Introducción al Álgebra, Geometría y Trigonometría. Buenos Aires, Grijalbo, 3a ed., vol. **II**, 1969.

DÍAZ Barriga Gazales, A. J.: Ecuaciones y desigualdades de primer grado. México, CECSA 1979.

DOLCIANI et al.: Álgebra moderna. México, Publicaciones Cultural, 1967.

DROOGAN, I. y Wooton, W.: Elementos del álgebra para bachillerato. México, Limusa, 1979.

GÓMEZ Calderón, J. et al**.:** Matemáticas formativas. CECSA, México, 1990.

GUERRERO de la Rosa, Rafael: **Fundamentos de Álgebra**. UNAM-SUA, México.

KALVIN, R. A.: Álgebra y funciones elementales. URSS, 1978.

LIZÁRRAGA Gaudry et al.: Matemáticas, Bachillerato. Progreso, México.

LOVAGLIA, F. M., Elmore y Conway, D.: Álgebra**.** México, Harla, 1972.

NICHOLS, E. D.: Álgebra 1. México, CECSA, 1980.

PERELMAN, Y.: EL divertido juego de las matemáticas. Barcelona, Círculo de Lectores, Ediciones Martínez Roca, 1968.

REES, P. K. et al.: Álgebra. México, McGraw Hill, 1980.

SOBEL, M. A. y Banks, J. H.: Álgebra, México, McGraw Hill, 1980.

SOBEL, Max et al.: Álgebra. Prentice Hall, México, 1989.

SPIEGEL, Murray R.: Álgebra superior. México, 1989.

WADE y Taylor: Matemáticas fundamentales. México, Limusa.