COLEGIO DE BACHILLERES

MATEMÁTICAS I

FASCÍCULO 1. ARITMÉTICA: UNA INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA

Autores: Raúl E. de la Rosa Macías
Ma. Guadalupe Lucio
Javier Páez
Alejandro Rosas Snell
Juan Zúñiga Contreras

COLEGIO DE
BACHILLERES

Colaboradores:
Olivia Hernández Romero
Juan Pérez Rodríguez
Eloisa Poot Grajales

Asesoría Pedagógica
Dora Ma. Mireles Alvarado

Revisión de Contenido
Miguel A. Marrufo Chan
Pedro Arrazola Calvo

Diseño Editorial
Leonel Bello Cuevas
Javier Darío Cruz Ortiz

Í N D I C E

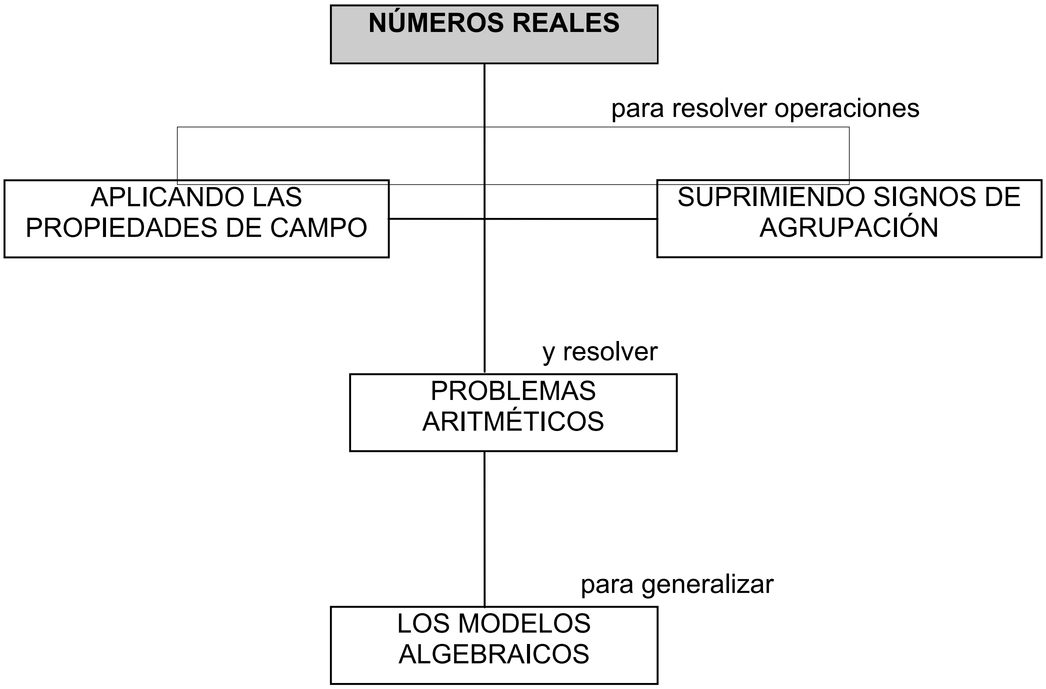
INTRODUCCIÓN

La Aritmética, como elemento de la cultura matemática se desarrolló a partir de la necesidad de operar con números, si bien es imposible establecer con exactitud el momento en el cual esta necesidad se generalizó podemos afirmar que, en la actualidad, una gran parte de las disciplinas científicas y de las actividades cotidianas tiene que ver con el conocimiento matemático, por lo menos en sus aspectos básicos, sólo por mencionar algunos ejemplos: en el cálculo de áreas, si queremos construir una casa, en los estados financieros y contables de las empresas, en las estadísticas de distintos fenómenos, en la información periodística, de noticias en la radio y televisión, etc.

Al plantear las reflexiones anteriores, nos introducimos al desarrollo de algunos métodos, algoritmos y procedimientos que nos permite comprender la importancia de adquirir un nivel eficaz de operatividad con los números, para facilitar así la resolución de problemas aritméticos y algebraicos, para este fascículo se estudiará. En el primer capítulo una breve semblanza sobre el origen de algunos sistemas de numeración, además aprenderás a desarrollar la operatividad de los números reales con signos de agrupación con base en las experiencias que tienes sobre el conocimiento y manejo de las operaciones fundamentales de la aritmética.

En el segundo capítulo estudiarás Métodos Aritméticos y Algebraicos que te ayudarán en la solución de problemas.

A continuación encontrarás un diagrama temático estructural cuya función es que conozcas e identifiques los puntos que vas a estudiar.


NÚMEROS REALES
para resolver operaciones
APLICANDO LAS PROPIEDADES DE CAMPO
SUPRIMIENDO SIGNOS DE AGRUPACIÓN
y resolver
PROBLEMAS ARITMÉTICOS
para generalizar
LOS MODELOS ALGEBRAICOS

SIMBOLOGÍA

A continuación se enlistan los símbolos que vas a utilizar para este fascículo:

R = Conjunto de números reales

Q = Conjunto de los números racionales

Q′= Conjunto de los números irracionales

Z = Conjunto de los números enteros

Z^+= Conjunto de números enteros positivos

Z^-= Conjunto de números enteros negativos

N = Conjunto de los números naturales

CAPÍTULO 1

ARITMÉTICA: UNA INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA

1.1 OPERANDO CON LOS NÚMEROS REALES

1.1.1 Orígenes de Algunos Sistemas de Numeración
1.1.2 Métodos y Algoritmos para Operar con Números de Diferentes Sistemas.
1.1.3 Propiedades de las Operaciones y Algoritmos de los Números Reales (R)
1.1.4 Los Números Enteros (Z)
1.1.5 Los Números Racionales (Q)
1.1.6 Los Números Irracionales (Q')

1.2 OPERACIONES CON SIGNOS DE AGRUPACIÓN

PROPÓSITO

Con el estudio de este capítulo operarás con los números reales y aplicarás las propiedades de sus operaciones que ya conoces.

¿QUÉ APRENDERÁS?

A identificar métodos, técnicas y procedimientos que te faciliten resolver problemas de carácter numérico.

¿CÓMO LO LOGRARÁS?

Por medio de un breve bosquejo histórico del surgimiento de algunos sistemas numéricos y su relación con la necesidad de contar y medir que la humanidad ha enfrentado, además conocer las características principales de estos sistemas nos permitirá observar las ventajas de utilizar el sistema decimal para presentar y operar con los números reales.

¿PARA QUÉ TE VA A SERVIR?

Para resolver operaciones con mayor rapidez y eficacia, esto con la finalidad de que reflexiones acerca del uso de las propiedades de las operaciones, como éstas que simplifican el trabajo operativo, y cómo, además nos permiten establecer algoritmos. Además, desarrollarás habilidades que te ayudarán a iniciar el estudio del álgebra.

CAPÍTULO 1. ARITMÉTICA: UNA INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA

1.1 OPERANDO CON LOS NÚMEROS REALES

En este tema estudiarás las principales características de algunos sistemas numéricos como: El egipcio, el romano, el maya y el decimal, así como algunos métodos y algoritmos para ejercitar las propiedades de los números reales y la elaboración de operaciones con el conjunto de los números enteros, racionales, irracionales y reales.

1.1.1 ORÍGENES DE ALGUNOS SISTEMAS NUMÉRICOS

¿Te has preguntado alguna vez cuántas operaciones aritméticas has realizado desde que ingresaste a la escuela primaria?, o más fácil, ¿cuántas habrás hecho durante este día?. Quizá te parezca ocioso calcular. ¿Cuántas veces late nuestro corazón durante nuestra vida? o, ¿cuántos Kilometros habremos recorrido desde que aprendimos a caminar? y ¿cuántas preguntas hemos planteado en este párrafo?.

Es extraño para ti que un escrito comience con tantas preguntas; en realidad lo que pretendemos es que reflexionemos juntos acerca de que el proceso de operar con números, aun sin darnos cuenta, forma parte de nuestra experiencia diaria.

Los símbolos numéricos que conoces y utilizas en tu vida diaria surgieron, en primera instancia, como una necesidad de expresar cantidades, así como las palabras expresan objetos o ideas.

Para ello el hombre utilizó símbolos muy rudimentarios como marcas en troncos de árboles o sobre bastoncillos, cuerdas con nudos, etc.; el manejo de estos símbolos fue inoperante por ejemplo: para representar el 10 lo hacían de la siguiente manera (IIIIIIIIII) o agrupaban (~~IIII~~ ~~IIII~~).

Al enfrentar la necesidad de representar con pocos símbolos un mayor número de objetos hizo posible el surgimiento de los sistemas de numeración.

1o. Contar y medir → Expresar con símbolos

Los sistemas de numeración de la antigüedad más conocidos fueron el *egipcio (a base de punto y rayas), el romano* (que utilizaba signos en forma de cuña o cuneiformes) y *el maya* (con puntos y rayas), de los cuales te damos algunos ejemplos en el siguiente cuadro.

Indo-arábigo	**Egipcio**	**Griego**	**Maya**	**Romano**
1	|	A	•	I
2	||	B	••	II
3	|||	Γ	•••	III
4	||||	Δ	••••	IV
5	III II	E	—	V
6	III III	F	$\underline{\cdot}$	VI
7	IIII III	Z	$\underline{\cdot\cdot}$	VII
8	IIII IIII	H	$\underline{\cdot\cdot\cdot}$	VIII
9		θ	$\underline{\cdot\cdot\cdot\cdot}$	IX
10		I		X
100		P		C

En el *sistema maya*, como se observa en el cuadro, cada símbolo representa un valor y de éstos se conservan dos características importantes: primero el valor que representa el símbolo y, segundo, el agrupamiento de los símbolos, para denotar cantidades mayores; ejemplos:

En el *sistema maya* se agrupaba en forma vertical así

cinco $\_$ y uno • para obtener $\underline{\bullet}$ seis

en esta forma de agrupar se suman los valores de los símbolos.

Numerales indoarábigos:

Los símbolos numéricos que utilizamos actualmente se originaron en la India, pero se atribuye a los árabes su difusión por Europa, por lo cual se le conoce con el nombre de sistema indoarábigo. Originalmente el sistema hindú contaba con los dígitos del uno al nueve, pues el concepto de cero apareció mucho después; sólo dos culturas antiguas denotaron al cero con un símbolo especial: el maya y la hindú, ésta última utilizó un símbolo llamado *Sunya* para expresar lugares vacíos; los árabes tradujeron la palabra *Sunya* por *Sifer*, la cual al ser latinizada cambió a *Céfiro*, de donde se originó la palabra *Cero*.

Actualmente, el sistema indoarábigo que se utiliza usa diez símbolos (dígitos) para representar los números: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Estos dígitos se combinan en un sistema posicional para representar cualquier cantidad; esto quiere decir que se le asigna un valor al dígito según la posición que ocupa, y, viceversa, por la posición del dígito se sabe cuántas unidades, decenas, centenas, etc., contiene la cantidad representada por un número.

Además del valor que se le asigna a un dígito, este sistema (indoarábigo) se caracteriza por agrupar de diez en diez; en este sentido, 10 unidades forman una decena, 10 decenas forman una centena, 10 centenas forman una unidad de millar y así, sucesivamente; por esta razón se dice que nuestra numeración es decimal o de base 10 y posicional.

Otros sistemas existentes son: sistema binario o de base 2, sistema de base 4, 5, 7. . . . .

En el siguiente ejemplo veremos cómo se le asigna valor a un dígito según su posición.

El número 5555 está formado por un mismo símbolo en diferentes lugares; es decir, tiene 5 unidades, 5 decenas, 5 centenas y 5 unidades de millar.

5 5 5 5

5 x 1 = 5
5 x 10 = 50
5 x 100 = 500
5 x 1000 = 5000

total = 5555 = 5000 + 500 + 50 + 5.

Usualmente los números naturales se escriben representados en esta forma 4375, 408, 59. Si nos preguntamos, ¿realmente qué significa 4375?, lo averiguaremos al leer el número así:

cuatro mil trescientos setenta y cinco.

Este número 4375 puede escribirse en forma desarrollada:

4375 = 4 x 1000 + 3 x 100 + 7 x 10 + 5 ó bien 4375 = 4000 + 300 + 70 + 5

La posición del 4 indica que se le asocia un valor de 4000 unidades, la del 3 indica 300 unidades, el 7, 70 unidades, y el 5, 5 unidades.

Esta última forma puede simplificarse aún más si se emplean exponentes para escribir los múltiplos de 10; por ejemplo:

$$\mathbf{1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3}$$

$$\mathbf{100 = 10 \times 10 = 10^2}$$

$$\mathbf{10 = 10^1}$$

$$\mathbf{4375 = 4 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 5 \times}$$

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Escribe los siguientes números en forma desarrollada

8427
47531
6541
19479

En los siguientes ejemplos se presenta una cantidad y su organización en unidades, decenas y centenas.

2 3 6

6	= 6
3 x 10	= 30
2 x 100	= 200
	236

1 2 6 9

9	= 9
6 x 10	= 60
2 x 100	= 200
1 x 1000	=1000
	1269

Observa la siguiente operación

$$\begin{array}{r} 1235 \\ +\ \underline{\ \ 987} \\ 2222 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (1 \times 1000) + (2 \times 100) + (3 \times 10) + 5 \\ \underline{(0 \times 1000) + (9 \times 100) + (8 \times 10) + 7} \\ (1 \times 1000) + (11 \times 100) + (11 \times 10) + 12 \\ \quad 1000 \quad + \quad 1100 \quad + \quad 110 \quad + 12 = 2222 \end{array}$$

Observa que el dígito 2 tiene distintos valores según su posición, por ejemplo, el segundo de izquierda a derecha representa dos centenas.

Una vez que se llegó a la utilización de símbolos para representar números se pudo operar con ellos; pensamos que la necesidad del hombre para calcular es antiquísimo. Los cálculos más complejos practicados por el hombre primitivo eran, al parecer, los destinados a señalar el paso de los días y meses.

2o. Calcular → Operar con números

En algunos sistemas de numeración aparecen las operaciones de la multiplicación y la adición, pero no en todos se puede operar fácilmente, como se observa en el siguiente ejemplo:

Suma →

$$\begin{array}{l} \text{CMXCVIII} \\ \underline{\text{CCXXV}\quad} \\ \text{MCCXXIII} \end{array}$$

Si no lo lograste prueba con la utilización de los números que conoces

$$\begin{array}{r} 998 \\ +\underline{225} \end{array}$$

El sistema de numeración egipcio tiene como características el sistema de base 10 y cada símbolo podía repetirse hasta nueve veces y escribirse en columna de derecha a izquierda, además no es posicional. Para multiplicar los egipcios utilizaban otro procedimiento. Este procedimiento apareció en un papiro que compró en 1858, en Egipto, Alexander Henry Rhind [1833-1863], por lo que se llama “Papiro de Rhind”, en el cual se explica que la multiplicación se efectúa por duplicaciones sucesivas.

Hagamos el siguiente ejemplo para mostrar este procedimiento:

Multipliquemos 19 por 7. ⇒ multiplicando por multiplicador

Los egipcios solían tomar el número mayor (multiplicando) y duplicarlo sucesivamente (19 + 19 = 38;. 38 + 38 = 76); por otra parte, para el número menor se toma la unidad y se duplica sucesivamente (1 + 1 = 2 2 + 2 = 4), posteriormente procedían a sumar, es decir:

Sumar los números de ⟶	1	19 + 19	Se suman los correspondientes
base 2 y sumarlos hasta ⟶	2	38 + 38	del multiplicando para obtener
obtener el valor del multiplicando ⟶	4	76	el resultado.
	7	133	

Observa que los números que sumamos son aquellos con los que se obtiene el menor elemento de la multiplicación el multiplicador; como en este caso el menor es el 7 sumamos 1 + 2 + 4 = 7. La marca ↦ se utilizó para designar estos elementos.

Realicemos la siguiente multiplicación por duplicación; multiplica 17 por 5:

⟶+	**1**	**17**	17
	2	**34**	68
⟶+	**4**	**68**	85
	5	**85 total**	

Observa que los números que se deben sumar son los que tienen marca ⟶ ¿Cómo harías para colocar las marcas?

Utilicemos nuevamente este procedimiento **para multiplicar 27 por 22**:

	1	**27**	54
⟶	**2**	**54**	108
⟶	**4**	**+ 108**	432
	8	**216**	594
⟶	**16**	**432**	
	22	**594 total**	

Para que aclares posibles dudas y te familiarices con este procedimiento, realiza las siguientes operaciones de multiplicación por duplicación.

multiplica 36 por 8	multiplica 43 por 9
multiplica 41 por 5	multiplica 68 por 1
multiplica 75 por 7	multiplica 79 por 6

Si te interesan estos tipos de multiplicación, se te sugiere investigar el método llamado *Multiplicación* por *Mediación y Duplicación,* también utilizado por los egipcios. (Consulta la bibliografía).

¿Te das cuenta de la ventaja que tiene utilizar sistemas de numeración posicional?

Esto nos ha permitido desarrollar métodos para facilitar operaciones, por ejemplo:

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Realiza la siguiente operación

$$
\begin{array}{r}
123456789 \\
987654321 \\
+\quad 123456789 \\
987654321 \\
\underline{\qquad\qquad 2}
\end{array}
$$

. ¿Por qué empezaste a sumar por el lado derecho?

. ¿Qué hiciste con los números que "llevabas"?

. ¿Qué características tiene el resultado?

. ¿Recuerdas qué significa el valor posicional?

Ahora que conoces algunas características del sistema decimal, enfocaremos nuestra atención en algunos algoritmos y métodos que facilitan las operaciones.

1.1.2 MÉTODOS Y ALGORITMOS PARA OPERAR CON NÚMEROS DE DIFERENTES SISTEMAS

a) Algoritmo de la Adición

Tomemos por ejemplo la operación siguiente: Notación desarrollada.

28 = 20 + 8 = 2 decenas + 8 unidades
+ 9 = 9 = 9 unidades
= 20 + 17 = 2 decenas +17 unidades
sumamos unidades
= 20 + (10 + 7)
= (20 + 10) + 7
= 30 + 7 ⟶ 37 = 3 decenas + 7 unidades

$$
\begin{array}{r}
{}^{1} \\
28 \\
\underline{+\quad 9} \\
37
\end{array}
$$

Ponemos 7 y (Llevamos 1, porque convertimos 10 unidades a una decena)

En el ejemplo anterior mostramos el hecho de llevar una decena. Este método se aplica cuando llevamos centenas, millares, etcétera.

Observa el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{r} {}^{1}\\ 57 \\ +\ \ 64 \\ \hline 121 \end{array}$$

57	=	5 decenas	+	7 unidades	
+ 64	=	6 decenas	+	4 unidades	(Recuerda que 10 unidades son una decena y que 10 decenas son una centena)
	=	11 decenas	+	11 unidades	

	=	(1 centena + 1 decena) + (1 decena + 1 unidad)
121	=	1 centena + (1 decena + 1 decena) + 1 unidad
	=	1 centena + 2 decenas + 1 unidad = 121

Así como existe un algoritmo para sumar se ha desarrollado uno para multiplicar.

b) Algoritmo de la multiplicación

Realiza la siguiente multiplicación:

Método de Scaciero

$$\begin{array}{r} \mathbf{25} \\ \mathbf{x\ \ 8} \\ \hline \end{array}$$

		8	
	2	**5**	
	4	**0**	**8 x 5 = 40**
1	**6**	**0**	**8 x 20= 160**
2	**0**	**0**	**Total**

Seguramente multiplicaste 8 x 5, anotaste el 0 y llevaste 4, después multiplicaste 8 x 2 y al resultado le sumaste el 4 que llevabas

$$\begin{array}{r} {}^{4}\\ \mathbf{25} \\ \mathbf{x\ \ \ \ 8} \\ \hline \mathbf{200} \end{array}$$

Analiza el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{lrl} & 69 & \\ \times & \underline{25} & \\ & 345 & = \ 5 \times 69 \\ & \underline{1380} & = \ 20 \times 69 \\ & 1725 & = \ (20 + 5) \times 69 \end{array}$$

. ¿Por qué cuando multiplicamos la segunda cantidad dejamos un espacio al principio?

. ¿Por qué tomamos el número de abajo para multiplicar el de arriba?

. ¿Por qué iniciamos de derecha a izquierda?

. ¿Qué pasará si invertimos las cantidades de la operación?

$$\begin{array}{lr} & 25 \\ \times & \underline{69} \end{array}$$

Realiza esta multiplicación igual que el procedimiento anterior.

Así como existe un algoritmo para sumar y multiplicar existe uno específico para dividir. ¿Lo recordarás?

Podemos concluir que:

Algoritmo: Es el procedimiento empleado para obtener el resultado de una operación. La palabra algoritmo es una deformación de ALKHOWARIZMI, nombre de un célebre matemático árabe que vivió en el siglo IX a.C. y que fue el primero que manejó estos procedimientos.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Ahora que conoces el algoritmo de la suma, ¿podrías encontrar un método eficaz para encontrar el resultado de la suma de los primeros 100 números naturales [1+2+3´+....+98+99+100=]?. Seguramente lo primero que se te ocurre pensar es, ¡qué suma tan grande!, pero trata de resolverla y luego lee la siguiente anécdota:

En una pequeña escuela de Brunswick, Alemania, en 1785, asistía un niño de ocho años de edad, **Carlos F. Gauss**, discípulo del maestro Büttner. Cierto día en que el maestro deseó tomarse un buen descanso, pensó tener a sus alumnos ocupados en realizar un problema bastante laborioso, como el de obtener la suma de los 100 primeros números naturales.

No había transcurrido ni tres minutos cuando, con sorpresa no muy agradable, Büttner fue interrumpido por el pequeño Gauss, quien le informó haber terminado. El resultado es 5050; el profesor tuvo que aceptar que el resultado era correcto. **¿Cuál fue el método empleado por Gauss?** pon atención:

Gauss observó que el primer número más el último dan 101; que el segundo número más el penúltimo dan 101; que el tercero más antepenúltimo dan 101:

ALGORITMO

1 + 2 + 3 + 4 .... + 97 + 98 + 99 + 100

1 + 100 = 101
2 + 99 = 101
3 + 98 = 101

101. . . .

Se formarían así, reflexionó Gauss, cincuenta de esas parejas cuyas suma es 101, por lo que la suma pedida se obtiene con una simple multiplicación del valor de la suma por el número de parejas formados (101 x 50 = 5050).

Con los conocimientos aritméticos adquiridos hasta el momento ya puedes resolver problemas más complicados. Se te sugiere resuelvas los siguientes problemas: ¿Puedes obtener el número mayor que se escribe, si usas tres veces la cifra 2 sin utilizar signos aritméticos?

Para saber cuál es el número mayor que utiliza tres dígitos 2, pensaremos ¿cuál será la disposición adecuada para hallar este número? ¿Qué te parece si lo anotamos de la siguiente manera $(2^2)^2$ el resultado es $(2^2)^2 = 2^4 = 16$. También podemos escribir 222 ó 22^2($22^2 = 484$), pero el mayor número lo obtendremos con la disposición 2^{22}($2^{22} = 4'194,304$)

En el ejemplo anterior observamos claramente que para obtener el número mayor deben anotarse los números (2) en la forma 2^{22}, ¿ocurriría lo mismo si tuviéramos tres dígitos 9? Para contestar esta pregunta, apoyémonos en el ejemplo anterior:

$$(9^9)^9 = 9^{81} = 1.966270505 \times 10^{77}$$

ahora 99^9(9.1351725×10^{17}) ó 9^{99}(2.9512665×10^{94})

¿Te das cuenta que el número mayor se obtiene con la disposición 9^{99}?

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Realiza los siguientes ejercicios:

Usa tres dígitos 3 y escribe el número mayor que puedas obtener:

$$(3^3)^3 =$$

Utiliza tres dígitos 4 y escribe el número mayor que puedas obtener:

$$(4^4)^4 =$$

Para resolver estos problemas necesitaste utilizar algunas características de los números reales; a estas características se les llama propiedades.

1.1.3 PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES Y ALGORITMOS DE LOS NÚMEROS REALES (R)

Los Números Naturales (N)
Uno de los conjuntos de números que conoces es el conjunto de los números naturales (N = 1,2,3,...). Este conjunto de números ha sido muy importante para la humanidad, los primeros 10 los puedes encontrar en los dedos de tus manos. Ver figura No. 1.

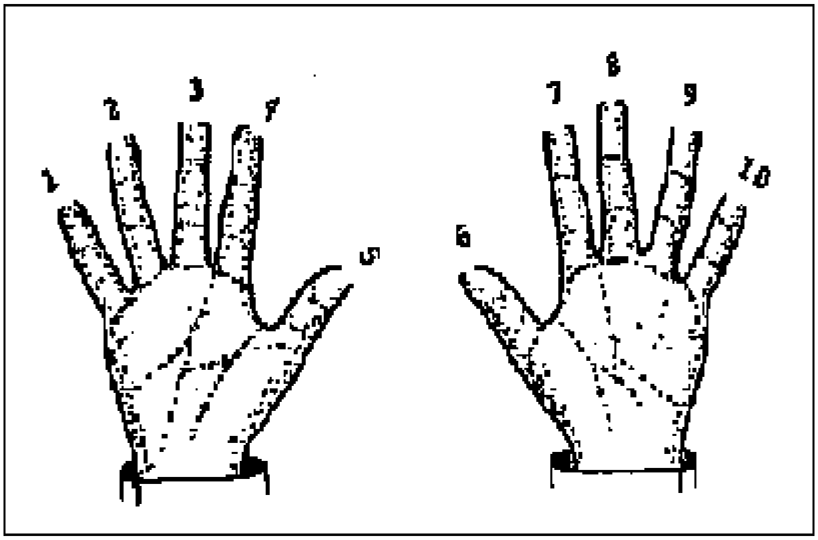


Figura. 1. He aquí la calculadora de menor costo para principiantes.

Recuerda que los algoritmos permiten realizar las operaciones con números.

¿Cómo se multiplica cualquier número por 10?

Observa los siguientes ejemplos:

4 x 10 = 40 **3891 x 10 = 38910**

Para multiplicar un número por 10 solamente es necesario anotar un cero a la derecha del número; comprobemos que esto es cierto mediante el algoritmo de la operación 26 x 10 = 260.

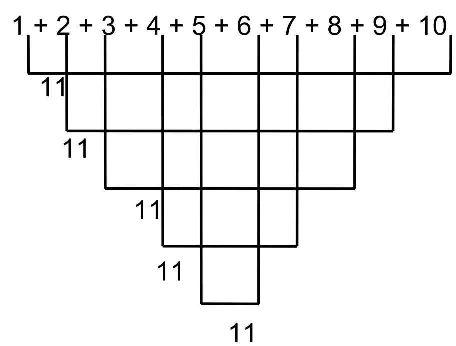
Comprueba este algoritmo y utiliza las propiedades.

Forma desarrollada:

26 x 10 = (20 + 6) x 10 notación desarrollada
= (2 x 10 x 10) + (6 x 10) propiedad distributiva
= (2 x 100) + (6 x 10) = propiedad asociativa
= 260 notación posicional

Ahora intenta sumar los primeros 10 números naturales: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10. ¿Recuerdas el método de Gauss?

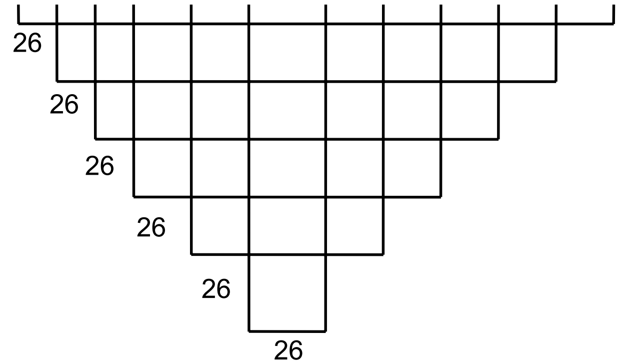
Solución:



11 X 5 = 55

¿Cuánto sumarán los primeros doce números naturales pares?
Solución:

2 +4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 +18 + 20 + 22 + 24



26 x 6 = (20 + 6)6
= 120 + 36
= 156

¿Cuánto sumarán los primeros doce números naturales impares?

Solución:

1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23

1 + 23 = 24
3 + 21 = 24
.
.
.
.
11 + 13 = 24

$\therefore$ **24 x 6 = (20 + 4) $\cdot$ 6 = 120 + 24 = 144**

En los ejemplos anteriores observaste que el método de Gauss para la suma de números naturales es una herramienta útil para calcular el resultado y también viste que existen números naturales pares e impares.

Recuerda que el conjunto de los números naturales pares = $\{x/x=2n,\ n \in N\}$ y el conjunto de los números naturales impares = $\{x/x=2n+1,\ n \in N\}$

Por otra parte, para calcular el producto (26) (6) se utilizó una técnica que frecuentemente es usada por todos nosotros, que consiste en descomponer en forma desarrollada la primera cantidad en la suma de (20 + 6) y luego multiplicamos por 6:

26 x 6 = (20 + 6) $\cdot$ 6 = 120 + 36 = 156

¿Será posible aplicar esta técnica para multiplicar mentalmente?

Haz la prueba con algunos números.

Observa que los resultados de la adición y la multiplicación son números naturales, entonces podemos decir que el conjunto de los números naturales es *cerrado* cuando se trata de una adición o una multiplicación. Esto quiere decir que si el conjunto dado es el de los números naturales y la operación es la adición o la multiplicación, el resultado será otro número natural. Por ejemplo:

4 + 5 = 9 y 2 x 6 = 12 **Todos son números naturales**

1. PROPIEDAD DE LA CERRADURA

Por tanto:

Si sumamos o multiplicamos dos números naturales el resultado es un número natural, entonces se dice que el conjunto de los números naturales es cerrado conforme a la operación dada.

Sin embargo, es importante aclarar y reflexionar que el conjunto de los números naturales no siempre es cerrado conforme a la sustracción (resta) o la división; por ejemplo:

$4 - 10 = -6$ **no es un número natural**

$\frac{6}{4} = 1.5$ **no es un número natural**

$\frac{20}{10} = 2$ **sí es un número natural**

$38 - 8 = 30$ **sí es un número natural**

2. PROPIEDEDAD CONMUTATIVA

Otra propiedad observable al sumar o multiplicar los números naturales es el orden en el cual se realiza la operación y no afecta el resultado, de tal forma que:

4 + 5 = 5 + 4 = 9 **y** **4 x 5 = 5 x 4 = 20**

A estas dos *expresiones* se les describe al decir que las operaciones de la adición y multiplicación tienen una propiedad conmutativa; entonces:

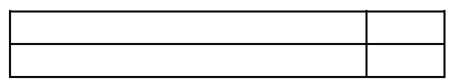
Si sumamos o multiplicamos dos números naturales y les cambiamos el orden, el resultado no se altera.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Lee cuidadosamente cada uno de los problemas e intenta resolverlos correctamente.

1. En una reunión de amigos hay cuatro mujeres y tres hombres. Si cada uno de los asistentes saluda de beso a los del sexo opuesto y de apretón de mano a los de su mismo sexo, ¿Cuántos saludos tienen lugar?

2. Ahora se trata de verificar si aprendiste a contar con números naturales ¿cuántos rectángulos hay en la siguiente figura?



3. Para solucionar algunos problemas es muy útil llegar a conocer una regla general. Encontrar el n-ésimo termino de una sucesión es encontrar dicha regla para todos los términos de la sucesión.

¿Puedes completar la sucesión y encontrar la regla?

a) 2,4,6,8,10, __, __, __, ...____
b)1,3,5,7,9, __, __, __,...____

- Aplica el principio posicional del sistema decimal y señala el valor del dígito indicado para cada caso.

a) 2345; 3
b) 10004;1
c) 23456;5
d) 2335489;4
e) 9378954;7
f) 9254361;2

4. Realiza el cálculo de las siguientes multiplicaciones, utiliza la técnica que se empleó en la sección anterior.

a) (28) (15) =
b) (65) (123) =
c) (32) (19)
d) (25) (17)

5. Aplica el método de Gauss para la suma de números naturales, calcula la suma de la siguientes series.

a) 3 + 6 + 9 + 12 + 15 + ... + 27 + 30
b) 5 + 10 + 15 + 20 + 25 ... + 60 + 65
c) 7 + 14 + 21 + 28 + 35 + ... + 77 + 84

3. PROPIEDAD ASOCIATIVA

Otra propiedad que se manifiesta es cuando se trata de sumar o multiplicar más de dos números; por ejemplo: 6 + 7 + 8. Por lo regular se suman dos números a la vez. Surge la pregunta acerca de si se debe sumar 6 + 8 y al resultado sumarle 7, entonces (6 + 8) + 7 = 14 + 7 = 21, o si se suma 6 al resultado de la suma de 8 y 7, esto es, 6 +(8 + 7) = 6 + 15 = 21. Al multiplicar (6) (7) (8) lo podemos hacer (6 • 7) (8) = 42 • 8 = 336 ó también (6) (7 • 8) = 6 • 56 = 336. Si te das cuenta no importa qué números se sumen o multipliquen primero, es decir:

Pueden asociarse los números en una u otra forma y obtener el mismo resultado. A esta propiedad de la adición y multiplicación se le llama propiedad asociativa.

4. PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

Existe otra propiedad de la adición y multiplicación de enorme importancia. Imagina que se quiere realizar el producto de 6 •(12 + 7), lo cual se expresa como 6(12 + 7), donde el punto indica o denota una multiplicación. El resultado se puede obtener de dos maneras diferentes:

a) suma 12 y 7, así: 6(12 + 7) = 6(19) = 114
b) multiplica primero por 6, así: 6(12 + 7) = 6(12) +6(7) = 72 + 42 = 114

A la propiedad anterior se le llama propiedad *distributiva* de la multiplicación con respecto de la adición.

PROPIEDADES DE CAMPO DE LOS NÚMEROS NATURALES EN LAS OPERACIONES	
Adición	**Multiplicación**
Cerradura: Si *a* y *b* son números naturales, entonces *a + b* también es un número natural.	**Cerradura:** Si *a* y *b* son números naturales, entonces *a • b* también es un número natural.
Conmutividad: Si *a, b,* son números naturales, entonces: *a + b = b + a*	**Conmutividad:** Si *a* y *b* son números naturales, entonces: *a • b = b • a.*
Asociatividad: Si *a, b, c* son números naturales, entonces: *(a + b) + c = a + (b + c)*	**Asociatividad:** Si *a, b, c* son números naturales, entonces: *a •(b • c) = (a • b) • c*
	Distributividad: Si *a, b, c* son números naturales, entonces: *a • (b + c) = (a • b) + (a • c)*

En los ejercicios anteriores utilizaste algunas propiedades; identifica cuáles fueron.

Dentro del conjunto de los números naturales existen números que sólo tienen dos divisores exactos, a estos números se les llama números primos, es decir sólo se dividen entre la unidad o entre sí mismos; pero si dividimos 60 entre 5, tendremos 12; por lo que podemos decir que 5 es divisor exacto de 60, pero también podemos decir que 60 es múltiplo de 5. Trata de encontrar cuántos divisores tiene 16.

Tu respuesta será 5 con toda seguridad 1, 2, 4, 8, 16; pero si se te ocurre preguntarte por los divisores de 154, quizá digas que algunos pueden ser 1, 7, 11 y el mismo 154. Resulta un poco difícil encontrar los divisores 7 y 11, no así, el 1 y el 154, los cuales resultan valores fáciles de hallar. De manera semejante, ¿puedes contestar cuántos y cuáles son los divisores del número 19? Si tu respuesta es: son dos, el 1 y el 19, acertaste. Con base en el desarrollo anterior, el número 1 no es primo, porque solamente tiene un divisor, él mismo. Si se excluye el 1, diremos que: *un número natural es primo si y sólo si tiene dos divisores, él mismo y la unidad (1).*

El matemático griego Eratóstenes (siglo III a.C.) ideó un método conocido con el nombre de “criba de Erastóstenes”; este método permite encontrar los números primos que están entre el 2 y el 50.

¿Podrías hallar esos números con la definición de número primo? Inténtalo.

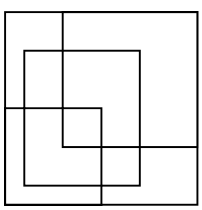
Recuerda que los números primos los has utilizado para obtener el mínimo común múltiplo (factores primos) y para hallar el común denominador, cuando aprendiste a sumar y restar racionales (fracciones).

¿Cuál es el procedimiento?. Más adelante encontraras el procedimiento o podrás consultar con tu asesor

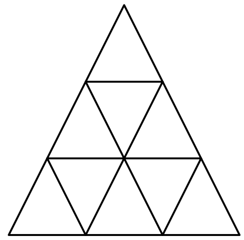
ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Lee cuidadosamente cada uno de los problemas e intenta resolverlos correctamente, una vez que encuentres la solución trata de encontrar una más directa

1. Este ejercicio requiere de un poco de atención ¿Cuántos cuadrados hay en la siguiente figura?



2. Observa detenidamente la figura que a continuación te mostramos. Según parece tiene algo muy especial pues en algunos monumentos de la Grecia Antigua aparece. Trata de reproducirla con un trazo ininterrumpido, sin que cruces las líneas y sin levantar el lápiz, la única restricción adicional es que hagamos menos de 10 giros.



3. ¿Cuál es la regla general que nos permite hallar todos los términos de los siguientes casos?

   3,6,9,12,15,__,__,__,__;

   10,13,16,19,__,__,__

4. Trata de explicar con tus propias palabras por qué ocurre que las sumas horizontales y verticales dan el mismo resultado.

1 + 3 + 5 + 7 =	16
7 + 5 + 3 + 1 =	16
5 + 3 + 7 + 1 =	16
3 + 5 + 1 + 7 =	16
16 + 16 + 16 + 16 =	64

1 + 2 + 3 + 4 =	10
5 + 6 + 7 + 8 =	26
9 + 10 + 11 + 12 =	42
15 + 18 + 21 + 24 =	78

5. ¿Qué puede decirse acerca de la suma de dos números naturales impares?

   3 + 5 = 8
   13 + 19 = 32

   3 + 17 = 20
   7 + 11 = 18

6. Considera la suma de los números naturales impares consecutivos. Encuentra un patrón y considera los 10 primeros números impares consecutivos.

   3 + 5 = 8
   5 + 7 = 12
   7 + 9 = 16
   9 + 11= 28

   11 + 13 = 24
   13 + 15 = 28
   15 + 17 = 32
   17 + 19 = 36
   19 + 21 = 40

7. Para los griegos que estudiaron la naturaleza de los números, principalmente los pitagóricos, resultó sorprendente encontrarse con una sucesión llamada de los números triangulares (observa la figura), cuyos primeros elementos son: 1,3,6,10,15,...¿Cuál será la regla que gobierna a estos números? La figura que se muestra es un apoyo visual para encontrar el n-ésimo término de la sucesión.

```
                          *
               *         **
       *      **        ***
      **     ***       ****
 1     3      6          10
```

1,3,6,10,15,__,__,__,

8. En la siguiente figura anota correctamente los dígitos del 1 al 8 de tal manera que dígitos consecutivos no queden en casillas adyacentes (juntas).

9. Quizás ya conoces algunos cuadrados mágicos, se les llama así porque al sumarse sus elementos numéricos horizontal, vertical y diagonalmente dan como resultado el mismo número, trata de realizar un cuadrado 4 x 4 cuya suma sea 34.

1.1.4 LOS NÚMEROS ENTEROS (Z)

Te has preguntado alguna vez: ¿cómo se expresa una deuda o una cuenta de cheques sobregirada?, ¿cómo se representa la temperatura cuando cae abajo de 0º?, ¿sabes qué tipo de números fueron tus respuestas?

Los números enteros. (Z)

Cheques	**Cuenta**	
	Disponible	**pagó**
Uno	1,000.00	1,500.00
Dos	2,000.00	3,000.00
Tres	3,000.00	5,000.00
Totales	6,000.00	9,500.00

¿Cuánto está sobregirada la cuenta?

Ciudad	**Temperatura °C en invierno**
Monterrey	-4ºC
Mérida	35ºC
Mexicali	-10ºC
D.F	0ºC
Chihuahua	-15ºC

A continuación utilizaremos nuevamente la regla de Gauss para calcular el valor de la suma de las series propuestas.

¿Cuánto sumarán los primeros veinticinco números enteros negativos? (Z)

$$\underbrace{(-1) + (-2) + (-3) + (-4) + (-5) + (-6) \ldots + (-23) + (-24) + (-25)}_{-26}$$

- 1 + (- 25) = -26
- 2 + (- 24) = -26
- 3 + (- 23) = -26
:
- 12 + (- 14) = - 26

Por lo tanto:

Como el (- 25) es un número impar es necesario sumarle al resultado que obtuvimos el número que queda sólo (sin pareja), en este caso el (- 13)

$$(-26)(12) = (-20 - 6)(10 + 2) = -200 - 60 - 40 - 12 = -312$$

$$(-1) + (-2) \ldots + (-24) + (-25) = [(-26)(12)] + (-13) = -312 - 13 = -325$$

¿Cuánto sumarán los primeros cien números enteros negativos?

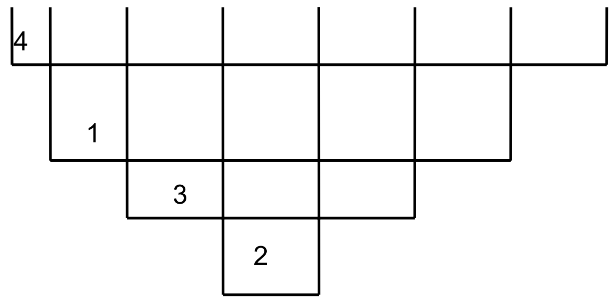
$$\underbrace{(-1) + (-2) + (-3) + \ldots + (-98) + (-99) + (-100)}_{-101}$$

$$\begin{aligned} -1 + (-100) &= -101 \\ -2 + (-99) &= -101 \\ -3 + (-98) &= -101 \\ (-101)(50) &= -(100 + 1)(50) \\ &= -(5000 + 50) \end{aligned}$$

Suma: = - 5050

¿Cuál es la suma de la siguiente serie?

0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 2 + 0 + 0 + 0 + 3 + 0 + 0 + 0 + 4



5. PROPIEDAD NEUTRO O IDÉNTICO DE LA ADICIÓN

0 + 0 + 0 = 0
0 + 4 = 4
1 + 0 = 1 $\therefore$ **4 + 1 + 3 + 2 = 10**
0 + 3 = 3
2 + 0 = 2

En los ejemplos anteriores nuevamente se utilizó la herramienta del método gaussiano, pero ahora con unas series que incluyen números enteros negativos; por otra parte, el tercer ejemplo de esta serie se utilizó una propiedad que intuitivamente manejas desde la secundaria, se trata de la suma de número entero con el cero.

$$a + 0 = a$$

Es momento para recordar que este elemento cero lo conoces como elemento *idéntico o neutro*, para la suma

¿Cuál es la suma en la siguiente serie?

(- 5) + (- 1) + 3 + 7 + 11 + 15 + 19 + 23

3 + 23 = 26
- 5 + (-1) = - 6 **7 + 19 = 26** **(26) (3) = 78**
11 + 15 = 26

$\therefore$ **Suma: - 6 + 78 = 72**

¿Cuál es la suma en la siguiente serie?

$$\underbrace{\mathbf{1 + (-1)}}_{0} \mathbf{+} \underbrace{\mathbf{2 + (-2)}}_{0} \mathbf{+} \underbrace{\mathbf{3 + (-3)}}_{0} \mathbf{+} \underbrace{\mathbf{4 + (-4)}}_{0} \mathbf{+ 5}$$

$$\underbrace{\mathbf{0 + 0 + 0 + 0}}_{\mathbf{0}} \mathbf{+ 5 = 5}$$

$$\mathbf{0 + 5 = 5}$$

Para realizar la suma asociamos cada número positivo con su opuesto, lo que hace recordar que al sumar un número con su opuesto el resultado es: cero.

$a + (-a) = 0$

A este número opuesto se le llama inverso aditivo

¿Cuál es el resultado de la suma?

1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1

0

1

0

1

0 Suma: 0

¿Cuál es la suma en la serie siguiente?

1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1

0

1

0

1

0

1 Suma: 1

En estos ejercicios podemos ver que al restar y sumar secuencialmente el número 1 obtenemos en el primer caso una suma igual a 0, mientras que en el segundo caso la suma es igual a 1, esto nos hace reflexionar acerca de esta situación; trata de explicar con tus propias palabras por qué es así.

Ya estudiaste uno de los sistemas numéricos más sencillos, el conjunto de los enteros junto con las operaciones de adición. Si realizamos la siguiente multiplicación, 4375 por 1 = 4375, vemos que el resultado es el mismo que el número propuesto (4375). ¿Habrá otro número que al multiplicarlo por otra cantidad dé la misma cantidad? La respuesta es no. Entonces el único número del conjunto de los naturales que al multiplicarlo con cualquier número de los naturales da como resultado otra vez el mismo número es el número 1, es decir:

$$1 \bullet a = a \quad \text{Neutro Multiplicativo}$$

¿Crees que existe un número que al sumarlo con otra cantidad dé como resultado dicha cantidad?, es decir, ¿existe un número de tal modo que al realizar $a + p = a$ para el conjunto dé los números naturales? La respuesta es no. Entonces, al conjunto de los números naturales está limitado para realizar operaciones aritméticas, por tal razón debemos aumentar al conjunto de los naturales y añadirle un nuevo número o elemento. Este elemento lo representamos por medio del cero (0) y se le llama *identidad aditiva*, el cual tiene la propiedad siguiente:

Neutro Aditivo o Idéntico

$$a + 0 = 0 + a = a \quad y \quad 0 + 0 = 0$$

El conjunto de los número enteros positivos se denota por Z^+

Cuando tratamos de resolver la expresión $x + 10 = 0$ y abarcamos sólo el conjunto de los números enteros positivos no tenemos solución, pues aquí no existe el - 10, entonces es necesario ampliar el conjunto de los Z^+ de forma que resulte un nuevo conjunto, que contenga a los números enteros positivos y a todos sus inversos aditivos (números enteros negativos), a este nuevo conjunto se le llamará genéricamente conjunto de los números enteros, denotado por Z y formado por {...- 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}. Por tanto, el conjunto de los números enteros abarca los siguientes números o elementos:

$$Z \begin{cases} \textbf{enteros positivos } (Z^+)\textbf{: 1, 2, 3, ... también son naturales} \\ \textbf{el número cero: 0} \\ \textbf{enteros negativos } (Z^-)\textbf{: .... - 3. - 2 - 1} \end{cases}$$

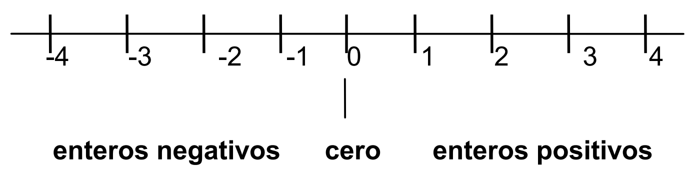
Recuerda que el producto del número cero y cualquier otro número entero siempre es cero, por ejemplo:

$$4 \bullet 0 = 0 \bullet 4 = 0$$

Al generalizar tendremos que si a pertenece a los Z, entonces $0 \bullet a = 0$

En este conjunto de los números enteros (Z) se define dos operaciones básicas la de la adición y la multiplicación con las propiedades de los números.

Al presentar el conjunto de los números enteros en la recta numérica retomamos un concepto importante como es el de sentido. Esto lo ilustramos con la recta numérica que tú conoces, en la cual se le asigna una posición con respecto al número cero (origen); a la izquierda del cero están todos los enteros negativos y a la derecha del cero, todos los enteros positivos. La siguiente gráfica ilustra el conjunto de los números enteros.



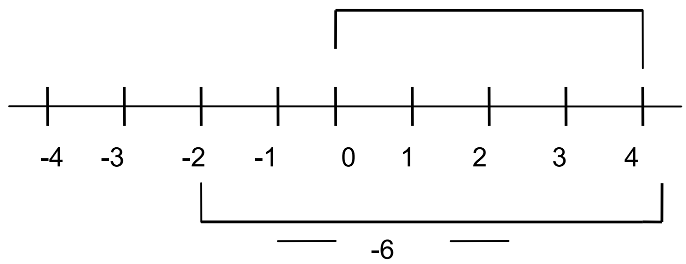
En el servicio meteorológico dijeron que la temperatura más alta fue de 8º y la más baja fue de -8º, ¿por qué se dice que la temperatura promedio fue de 0º? ¿Qué relación hay entre el 8 y el -8?

Observa en la recta numérica que para cada número positivo existe uno negativo.

En la gráfica anterior es fácil observar que el simétrico de 4 es -4; como recordarás, a este simétrico se le llama *inverso aditivo*; por lo que decimos que cualquier número entero a, tiene su inverso aditivo que es un entero que está *n* unidades de otro lado del cero; sobre la recta numérica esto es el entero *-a*.

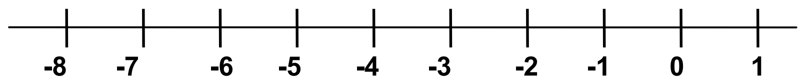
¿Cómo aplicarías el concepto de sentido para realizar operaciones?

Este concepto de sentido, hacia la izquierda del cero (negativo) o hacia la derecha del cero (positivo), lo podemos comprobar con la operación de la sustracción. Por ejemplo, al realizar 4 - 6 llegamos al resultado fácilmente, al utilizar la recta numérica de la siguiente forma: hacemos un movimiento hacia la derecha (sentido positivo) a partir del cero de cuatro unidades, seguido de otro movimiento de seis unidades hacia la izquierda (sentido negativo a partir del cuatro, el punto final es - 2, como se ilustra:



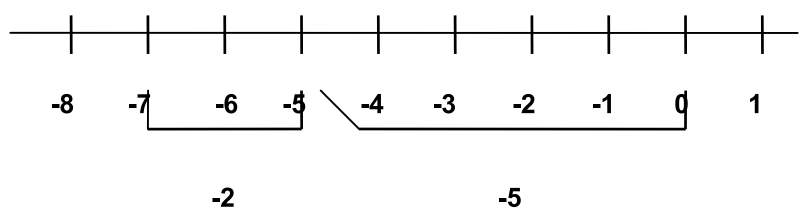
¿Te resulta fácil entender el ejemplo anterior?. Si no fue así, ilustra sobre la recta numérica la siguiente operación - 5 - 2:

ADICIÓN DE DOS NÚMEROS NEGATIVOS



La operación la haces con un movimiento de 5 unidades a la izquierda del cero, seguido por 2 unidades más , a la izquierda. El resultado es -7; de ahí que - 5 - 2 = 7, entonces:

$$(-5) + (-2) = -(5 + 2) = -7$$



Con base en lo anterior, observarás que la operación de sustracción puede ser considerada como la opuesta de la adición, por tanto, cualquier problema de sustracción puede transformarse en un problema de adición, por ejemplo**:**

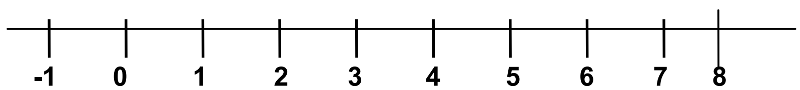
problemas de sustracción	**problemas equivalentes en la adición**
4 - 2	**4 + (- 2)**
11 - 5	**11 + (- 5)**
- 5 - 3	**(- 5) + (- 3)**
3 - (-4)	**3 + 4**

Resuelve los ejemplos anteriores y representándolos en la recta numérica**.**

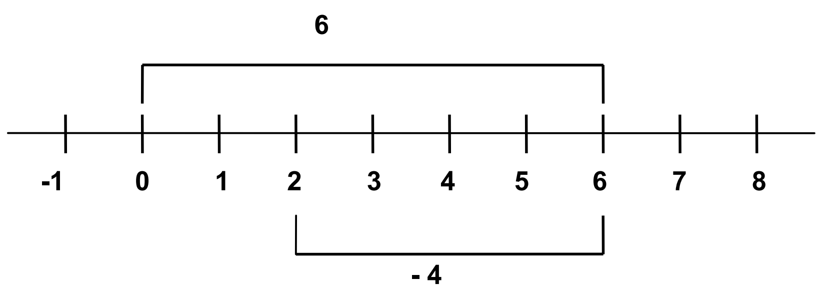
Por tanto, definimos que, si *a* y *b* son dos enteros cualesquiera, entonces:

$$a - b = a + (-b)$$

Veamos otro ejemplo para mostrar el procedimiento anterior: realiza la adición equivalente de 6-4 e ilústralo sobre la recta numérica:



$$6 - 4 = 6 + (-4) = 2$$



El resultado que muestra la gráfica es 2.

Al retomar estos conceptos mencionaremos las reglas para la multiplicación de números enteros:

a) El producto de dos enteros positivos es positivo.

b) El producto de un entero positivo y un entero negativo es negativo.

c) El producto de dos enteros negativos es positivo.

Propiedades de los Números Enteros	
Adición	**Multiplicación**
Cerradura: La adición de cualesquiera dos números enteros a y b es siempre un entero.	**Cerradura:** El producto de dos enteros a y b siempre es un entero.
Conmutatividad: Para cualesquiera dos enteros a y b; a + b = b + a.	**Conmutatividad:** Para cualesquiera dos enteros a y b; a b = b a.
Asociatividad: Para cualesquiera tres enteros a, b y c; a + (b + c) = (a + b) + c.	**Asociatividad:** Para cualesquiera tres enteros a, b y c; a • (b • c) = (a • b) • c.
Identidad de la Adición. El número cero (0) es la identidad para la adición. a + 0 = 0 + a = a.	**Identidad de la Multiplicación:** El número 1 es la identidad para la multiplicación; 1 • a = a • 1 = a.
Inverso aditivo: Todo número entero tiene un inverso aditivo, a + (- a) = 0	**Distributividad:** Para cualesquiera tres enteros; a, b y c; a • (b + c) = a • b + a • c y (a + b) • c = a • c + b • c.

En los ejemplos siguientes se muestran algunas propiedades de la multiplicación de números enteros.

¿Cuál es el valor de la suma?

(1 • 2) + (1 • 3) + (1 • 4) + (1 • 5) + (1 • 6) + (1 • 7) + (1 • 8)

Solución: Al multiplicar el término común con cada uno de los sumandos tenemos:

2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = [3(10) + 5] por el método Gauss)

= [30 + 5]

= 35

¿Cuál es el valor de la suma?

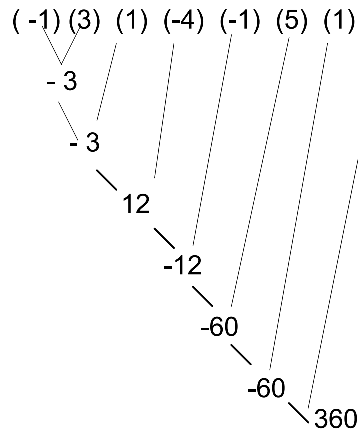
(12 • 1) + (12 • 2) + (12 • 3) + (12 • 4) + ... + (12 • 19) + (12 • 20) = 12 + 24 + 36 + 48 + ... + 228 + 240

10(12 + 240) = 120 + 2400 (propiedad es distributiva)

= 2520

Analiza los siguientes ejemplos:

¿Cuál es el producto?

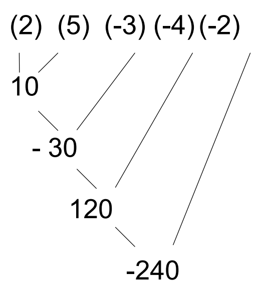


Producto = 360

¿Observaste cuándo el producto sucesivo de números enteros es positivo?

Ahora revisa éste:

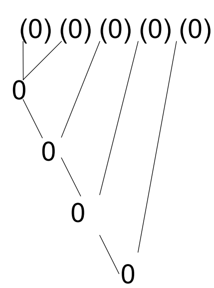
¿Cuál es el producto?



Producto - 240

¿Observaste cuándo el producto de números enteros es negativo?

¿Cuál es el producto?



Producto: 0

En los ejemplos anteriores observaste algunas características propias de la multiplicación de números enteros. Debes recordar las leyes de signos de la multiplicación que aprendiste en la secundaria; sí aún no te queda claro, fija tu atención en el número de factores con signo negativo y explica tus propias conclusiones.

1.1.5 LOS NÚMEROS RACIONALES (Q)

Analiza las siguientes situaciones:

a) Un automóvil recorre 400 km. en 5 hr.
b) El promedio de goleo de Hugo Sánchez es de 3 por cada 2 partidos
c) Compre 3 llantas y lleve otra gratis

a)

Distancia	Tiempo
100 km	1 hr. 15 min
200 km	2 hrs. 30 min
400 km	5 hrs.
800 km	10 hrs.

b)

Goles	Partidos
3	2
6	4
9	6
12	8

c)

Núm. llantas	
Compradas	**Gratis**
3	1
6	2
9	3
12	4
15	5
18	6

En cada una de estas afirmaciones existe la comparación cuantitativa de dos cantidades.

a) 400/5 b) 3/2 c) 3/1

Estas expresiones representan una división.

La división de dos números enteros no siempre es exacta, esto produce fracciones como 1/2, 4/5, 8/7, etc. Entonces el conjunto de los números enteros se extiende para incluir dichas fracciones, dando como resultado los números racionales, denotado por:
Q [{...- 4/2, - 2/2, 0/2, 1/1, 4/2...}].

Un número racional es aquel que puede escribirse en la forma a/b, donde a y b son números enteros, a ***a*** se le llama numerador, *a* ***b*** se le llama denominador y *b* es diferente de cero (no se permite dividir entre cero). Un número racional se puede escribir como *a/b* ¿Conoces otras formas de representar un racional?

Al hacer la conversión $\frac{2}{3} = 0.666$, resulta que también es un número racional.

Al introducir en el conjunto de los números enteros fracciones de la forma $\frac{a}{b}$, podemos hablar de igualdad de fracciones o números racionales.

Por ejemplo, $\frac{1}{5}$ y $\frac{5}{25}$ representa *n* el mismo número racional, por lo que podemos concluir $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y sólo si *ad* = *bc*

Realicemos la operación: $\frac{1}{5} = \frac{5}{25} \langle = \rangle 1 \bullet 25 = 5 \bullet 5 \therefore 25 = 25$

Si utilizamos la igualdad de números racionales podemos probar el siguiente resultado, que te permitirá reducir resultados en la forma $\frac{a}{b}$, entonces:

$$\frac{a}{b} = \frac{(ak)}{(bk)} ,k \neq 0;$$

entonces:

$$a(bk) = b(ak)$$

Para que este concepto sea más claro, vamos a reducir $\frac{20}{30}$.

$$\frac{20}{30} = \frac{(2 \bullet 10)}{(3 \bullet 10)} = \frac{2}{3}$$

Ahora inténtalo tú, reduce $\frac{6}{36}$

La solución es: $\frac{6}{36} = \frac{6 \bullet 1}{6 \bullet 6} = \frac{1}{6}$

Hagamos otro ejemplo: encuentra un número racional que tenga un denominador 45 y sea igual a $\frac{7}{9}$.

La solución es:

$$\frac{7}{9}=\frac{7\bullet 5}{9\bullet 5}=\frac{35}{45}$$

A continuación definiremos las operaciones con los números racionales.

El producto de dos números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se define como:

$$\frac{a}{b}\bullet\frac{c}{d}=\frac{a\bullet c}{b\bullet d}=\frac{ac}{bd}$$

Por ejemplo: multiplica $\frac{4}{5}$ por $\frac{7}{9}$: $\frac{4}{5}\bullet\frac{7}{9}=\frac{4\bullet 7}{5\bullet 9}=\frac{28}{45}$

La suma de dos números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ está definida como:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

y cuando: d = b

se tiene:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

Por ejemplo suma: $\frac{3}{7}$ y $\frac{4}{9}$: $\frac{3}{7}+\frac{4}{9}=\frac{3\bullet 9+7\bullet 4}{7\bullet 9}=$

$$=\frac{27+28}{63}=\frac{55}{63}$$

La diferencia de dos números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ está definida como:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\frac{-c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

por ejemplo, realiza $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{5}+\frac{-1}{6}$

$$\frac{1\bullet 6-1\bullet 5}{5\bullet 6}=\frac{6-5}{30}=\frac{1}{30}$$

Para definir la división debemos conocer el recíproco de un número. El recíproco de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$ cuando $\frac{a}{b}\neq 0$; lo anterior se observa cuando multiplicamos $\frac{a}{b}$ por $\frac{b}{a}$, donde el resultado es 1. Por lo que podemos decir, el producto de cualquier número racional distinto de cero por su recíproco es 1, por tal razón, el recíproco de un número racional también se le llama *inverso multiplicativo*, entonces:

El cociente de dos números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ está definida como:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\bullet\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc},\frac{c}{d}\neq 0$$

Con base en la expresión anterior, se permite en la división de dos números racionales invertir el divisor y pasarlo como multiplicador, por ejemplo:

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{8}}=\frac{2}{5}\bullet\frac{8}{3}=\frac{16}{15}\text{ y }\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}=\frac{3}{4}\bullet\frac{6}{5}=\frac{18}{20}=\frac{9}{10}$$

Las operaciones con números racionales o fracciones constituyen un avance en el manejo de cantidades que no son enteras, por ejemplo cuando vamos de compras a la tienda podemos solicitar un kilo y medio de frijol, lo podemos traducir al lenguaje aritmético como:

$$\left[1+\frac{1}{2}\right]$$

En los ejemplos que a continuación se muestran observarás que las operaciones con frecuencia requieren del manejo de las operaciones con números enteros, de las operaciones básicas con fracciones y de la intuición que has desarrollado.

a) $$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2}}}=\frac{4}{3}$$

b) $$3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{3}{4}}}=\frac{40}{11}$$

c) $$1-\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{2+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{3}}}}=-\frac{1}{13}$$

d) $$\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{1+\left[\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right]}-1=-\frac{8}{7}$$

Con el objeto de retroalimentar tu conocimiento acerca de las operaciones con fracciones, resolveremos un ejemplo que te servirá de base para contrastar lo que ya sabes con el algoritmo que se te muestra.

Adición de Números Racionales.

¿Cuál es el valor de la suma?

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$

Recuerdas que había que calcular el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores.

$$\begin{array}{r|l}
2,4,8 & 2 \\
1,2,4 & 2 \\
1,1,2 & 2 \\
\hline
1,1,1 & (2)(2)(2) = 8
\end{array}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{4+2+1}{8}=\frac{7}{8}$$

Este proceso utiliza tres de las primeras cuatro operaciones: suma, división y multiplicación de números enteros.

¿Te has preguntado por qué se utiliza este algoritmo?

¿Habrá algún otro que nos conduzca al mismo resultado?

Quizás el siguiente proceso conteste en parte las preguntas anteriores.

Este algoritmo está basado en el concepto de fracción equivalente. ¿Cuándo se dice que dos fracciones son equivalentes?

Ejemplo:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \quad \text{¿Por qué?}$$

Son equivalentes por principio básico de la proporcionalidad.

(1)(4) = (2)(2)

4 = 4

¿Ya te acordaste?. Bien, resolvamos el ejemplo:

Paso 1.

Hallar el mínimo común múltiplo (m.c.m)

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{2,4,8} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1,2,4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1,1,2} & \mathbf{2} \\ \hline \mathbf{1,1,1} & \mathbf{(2)(2)(2) = 8} \end{array}$$

Paso 2

Encuentras las fracciones equivalentes:

$$\frac{1}{2}(?) = \frac{?}{8}$$

$$\frac{1}{2}\frac{(4)}{4} = \frac{4}{8}$$

$$\frac{1}{2}(?) = \frac{?}{8}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}(?) = \frac{?}{8} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{4}{4}\right) = \frac{4}{8} \\ \frac{1}{4}(?) = \frac{?}{8} \\ \frac{1}{4}\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{2}{8} \\ \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \end{array}\right.$$

sumamos:

$$\frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

¿Cuál es la suma de las fracciones?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{-1}{4}$$

Paso 1.

Calcular el mínimo común múltiplo.

2,3,4 entonces (m.c.m.) = 12

Paso 2.

Calcular las fracciones equivalentes.

$$\frac{1}{2} \bullet \frac{6}{6} = \frac{6}{12};\ \frac{1}{3} \bullet \frac{4}{4} = \frac{4}{12};\ \frac{-1}{4} \bullet \frac{3}{3} = \frac{-3}{12}$$

Sumamos equivalentes:

$$\frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{-3}{12} = \frac{6 + 4 + (-3)}{12} = \frac{7}{12}$$

¿Cuál es el valor de la suma?

$$\frac{1}{2} + \frac{-1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{-1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{-1}{12}$$

Paso 1

Calcula el mínimo común múltiplo (m.c.m.)

2, 4, 6, 8, 10, 12	**2**
1, 2, 3, 4, 5, 6	**2**
1, 1, 3, 2, 5, 3	**2**
1, 1, 3, 1, 5, 3	**3**
1, 1, 1, 1, 5, 1	**5**
1, 1, 1, 1, 1, 1	$\mathbf{(2^3)(3)(5) = (8)(3)(5) = 120}$

Paso 2

Calcula las fracciones equivalentes:

$$\frac{1}{2}\bullet\frac{60}{60}=\frac{60}{120};\ \frac{-1}{4}\bullet\frac{30}{30}=\frac{-30}{120};\ \frac{1}{6}\bullet\frac{20}{20}=\frac{20}{120}$$

$$\frac{-1}{8}\bullet\frac{15}{15}=\frac{-15}{120};\ \frac{1}{10}\bullet\frac{12}{12}=\frac{12}{120};\ \frac{-1}{12}\bullet\frac{10}{10}=\frac{-10}{120}$$

Sumemos las fracciones equivalentes

$$\frac{60}{120}+\frac{-30}{120}+\frac{20}{120}+\frac{-15}{120}+\frac{12}{120}+\frac{-10}{120}=\frac{37}{120}$$

A continuación observarás unos ejemplos que te harán recordar cómo se multiplican las fracciones o números racionales.

¿Cuál es el producto de números racionales?

$$\left(\frac{-3}{4}\right)\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{-1}{5}\right)\left(\frac{-3}{7}\right)=\left(\frac{6}{12}\right)\left(\frac{-1}{5}\right)\left(\frac{-3}{7}\right)$$

$$=\left(\frac{-6}{60}\right)\left(\frac{-3}{7}\right)$$

$$=\frac{18}{420}=\frac{3}{70}$$

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Si recordaste cómo se resuelve la suma de *números racionales* (fracciones), ahora podrás comparar ese conocimiento con el algoritmo mostrado anteriormente que utiliza el concepto de fracción equivalente; trata de encontrar las analogías o semejanzas entre ambos métodos, de tal manera que puedas utilizarlos cuando se requiera.

Respecto a la multiplicación, trata de contestar las siguientes preguntas:

¿Cuándo el producto de fracciones es negativo?

¿Cuándo el producto de fracciones es igual a la unidad?

¿Se cumple para todo número racional (fracción) la proposición $\left(\frac{a}{b}\right)(1) = \left(\frac{a}{b}\right)$ para $b \neq 0$ **?**

¿Un número racional $\left(\frac{a}{b}\right)$(a) para $b \neq 0$ puede interpretarse como cociente?

Ejemplo:

a) $$1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}} = 0$$

$$1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{\frac{1}{2}}} = 0$$ porque: $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$1 + \frac{1}{1 - 2} = 0$$ porque: $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \div \frac{1}{2} = \frac{2}{1}$

$$1 + \frac{1}{-1} = 0$$

$$1 - 1 = 0$$

$$0 = 0$$

Ejemplo:

b) $$3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{3}{4}}}=\frac{40}{11}$$

$$3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{7}{4}}}=\frac{40}{11}$$ porque: $1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$

$$3+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{7}}=\frac{40}{11}$$ porque: $\cfrac{1}{\cfrac{7}{4}}=\frac{4}{7}$

$$3+\cfrac{1}{\cfrac{11}{7}}=\frac{40}{11}$$ porque: $1+\frac{4}{7}=\frac{11}{7}$

$$3+\frac{7}{11}=\frac{40}{11}$$ porque: $\cfrac{1}{\cfrac{11}{7}}=\frac{7}{11}$

$$\frac{33}{11}+\frac{7}{11}=\frac{40}{11}$$ porque: $\frac{40}{11}=\frac{40}{11}$

Ejemplo:

c) $$1-\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{2+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{3}}}}=-\frac{1}{13}$$

$$1-\frac{2}{1+\frac{3}{2+\frac{1}{\frac{2}{3}}}}=-\frac{1}{13}$$ porque: $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$$1-\frac{2}{1+\frac{3}{2+\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{13}$$ porque: $\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$

$$1-\frac{2}{1+\frac{3}{\frac{7}{2}}}=-\frac{1}{13}$$ porque: $2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$

$$1-\frac{2}{1+\frac{6}{7}}=-\frac{1}{13}$$ porque: $\frac{3}{\frac{7}{2}}=\frac{6}{7}$

$$1-\frac{2}{\frac{13}{7}}=-\frac{1}{13}$$ porque: $1+\frac{6}{7}=\frac{13}{7}$

$$1-\frac{14}{13}=-\frac{1}{13}$$ porque: $\frac{2}{\frac{13}{7}}=\frac{14}{13}$

$$-\frac{1}{13}=-\frac{1}{13}$$

Ejemplo:

d) $$\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}-1=-\frac{8}{7}$$

$$\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{6}}-1=-\frac{8}{7}$$

porque: $\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}$

$$\frac{-\frac{1}{6}}{1+\frac{1}{6}}-1=-\frac{8}{7}$$

porque: $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{2-3}{6}=-\frac{1}{6}$

$$\frac{-\frac{1}{6}}{\frac{7}{6}}-1=-\frac{8}{7}$$

porque: $1+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$

$$-\frac{1}{7}-1=-\frac{8}{7}$$

porque: $-\left(\frac{1}{6}\right)\bullet\left(\frac{6}{7}\right)=-\frac{1}{7}$

porque $-\frac{1}{7}-1=-\frac{8}{7}$

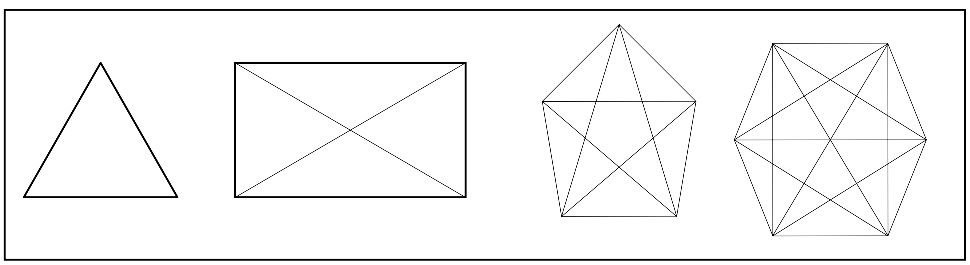
ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Lee cuidadosamente cada uno de los problemas e intenta resolverlos correctamente; una vez que encuentres la solución, trata de encontrar una más directa. Observa en cada ejercicio las propiedades que utilizas.

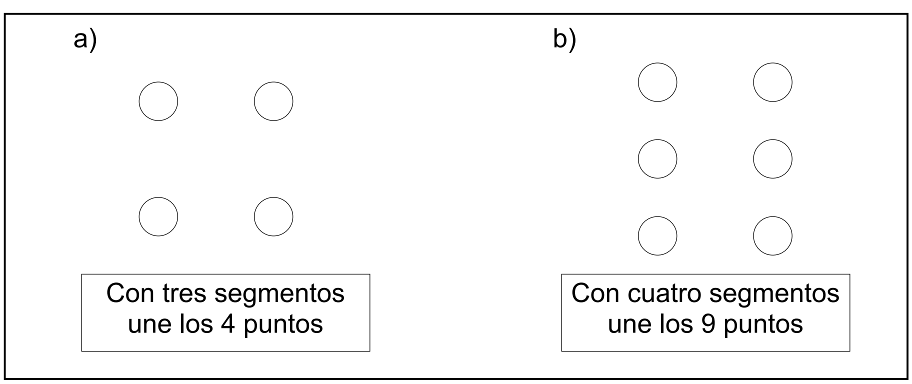
1. ¿Cuál es la regla que nos permite encontrar el *n*-ésimo término de la sucesión?

$$-\frac{3}{2},-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},\ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots\ldots,\ \underline{\hspace{4cm}}$$

2. Una diagonal de un polígono es un segmento de recta que une dos vértices no adyacentes. Aquí *n* representa el número de lados de un polígono. ¿Cuál es la regla general para determinar cuántas diagonales tiene un polígono de 50 lados sin dibujarlo?



3. Sin levantar el lápiz y sin cruzar los segmentos de recta resuelve los problemas siguientes.



Problemas

1. Aplica las propiedades de las operaciones con números enteros y racionales, además resuelve los problemas.

a) $\dfrac{-3(3-3)}{-3}=$

b) $\left(\dfrac{-24}{15}\right)\left(\dfrac{-10}{40}\right)\left(\dfrac{5}{8}\right)=$

c) $\left(\dfrac{1}{-2}\right)\left(\dfrac{-6}{5}\right)\left(-\dfrac{15}{9}\right)=$

d) $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{3}\right)=$

e) $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{6}{8}\right)=$

f) $1-\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{5}{6}+\dfrac{2}{3}\right)$

2. Usa las propiedades de la multiplicación y división de fracciones. Resuelve.

a) $\left[\dfrac{-3}{2}\div\dfrac{1}{2}\right]\div 2=$

b) $\dfrac{3}{2}\left[-\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{4}\div 3\right)\right]=$

c) $3-2\left[\dfrac{1}{2}-4\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\right]=$

d) $1-\dfrac{2}{3}\left[\dfrac{2}{4}-\dfrac{1}{4}\right]=$

3. A las fracciones siguientes deberás reducirlas hasta encontrar el resultado.

a) $$2-\frac{1}{1+\frac{3}{4}}=$$

b) $$3-\frac{2\left(\frac{1}{4}\right)}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}=$$

c) $$2+\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{2}{3}}}}=$$

d) $$3+\frac{1}{1-\frac{1}{(2)(3)}}=$$

4. Si una pelota se deja caer desde una altura de 10 m y rebota aproximadamente la mitad de la distancia en cada caída, calcula la distancia recorrida por ésta después de tres rebotes.

1.1.6 LOS NÚMEROS IRRACIONALES. (Q')

Los griegos (600 años a.C.) descubrieron la existencia de números que no eran racionales, a este conjunto de números lo llamamos "Conjunto de los números irracionales" denotado por Q'. Este descubrimiento hecho por miembros de una sociedad secreta fundada por Pitágoras muestra que los números irracionales no se pueden expresar como cociente de dos enteros y tienen una representación decimal infinita no periódica; por ejemplo:

$$\{\sqrt{2}\,,\ \sqrt{3}\,,\ \text{o},\ 6.101001000....\}$$

Con base en la clasificación de los números, la unión del conjunto de los números racionales con el de los números irracionales se le conoce como el conjunto de los números reales, denotado por **R**[**Q** unión **Q' = R**]. De esta manera podemos recordar que los números racionales son aquellos que se expresan como el cociente de dos enteros y tienen expansión decimal finita o infinita periódica. Los números irracionales son aquellos que no se pueden expresar como cociente de dos enteros y su presentación decimal es infinita no periódica.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Resuelve los siguientes ejercicios:

1) Establece en cada uno de los siguientes problemas qué propiedades se aplican.

a) $5 + 7 = 7 + 5$

b) $(8 + 4) + 2 = 8 + (4 + 2)$

c) $8 + (4 + 2) = 8 + (2 + 4)$

d) $5(3 + 8) = 5(8 + 3)$

e) $4(6 \bullet 7) = 4(7 \bullet 6)$

f) $5 \bullet (3 \bullet 8) = 5 \bullet (8 \bullet 3)$

2) Ilustra sobre la recta numérica la operación indicada.

a)	$4 - 5$	d)	$- 4 - 3$	g)	$5 - 3$
b)	$4 + 6$	e)	$- 6 + 5$	h)	$6 - 6$
c)	$8 - 5$	f)	$4 + (- 6)$	y)	$7 + (- 4)$

3) Obtén el producto de cada multiplicación.

a) $(- 4) \bullet (5) =$	c) $(- 12) \bullet (- 11) =$	e) $(0) \times (- 10) =$
b) $(6) \bullet (- 7) =$	d) $(-0) \bullet (0) =$	f) $7 \times 0 =$

4) Realiza las siguientes operaciones y reduce el resultado (si es posible).

a) $\frac{1}{7} + \frac{1}{4}$

b) $\frac{3}{4} + \frac{4}{7}$

c) $\frac{1}{4} - \frac{1}{7}$

d) $\frac{4}{7} - \frac{3}{5}$

e) $\frac{4}{5} \bullet \frac{2}{8}$

f) $\frac{3}{8} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right)$

g) $\left(\frac{1}{5} \bullet \frac{1}{4}\right) \bullet \frac{3}{7}$

h) $\frac{1}{2} \div \left(\frac{1}{8} \div \frac{1}{4}\right)$

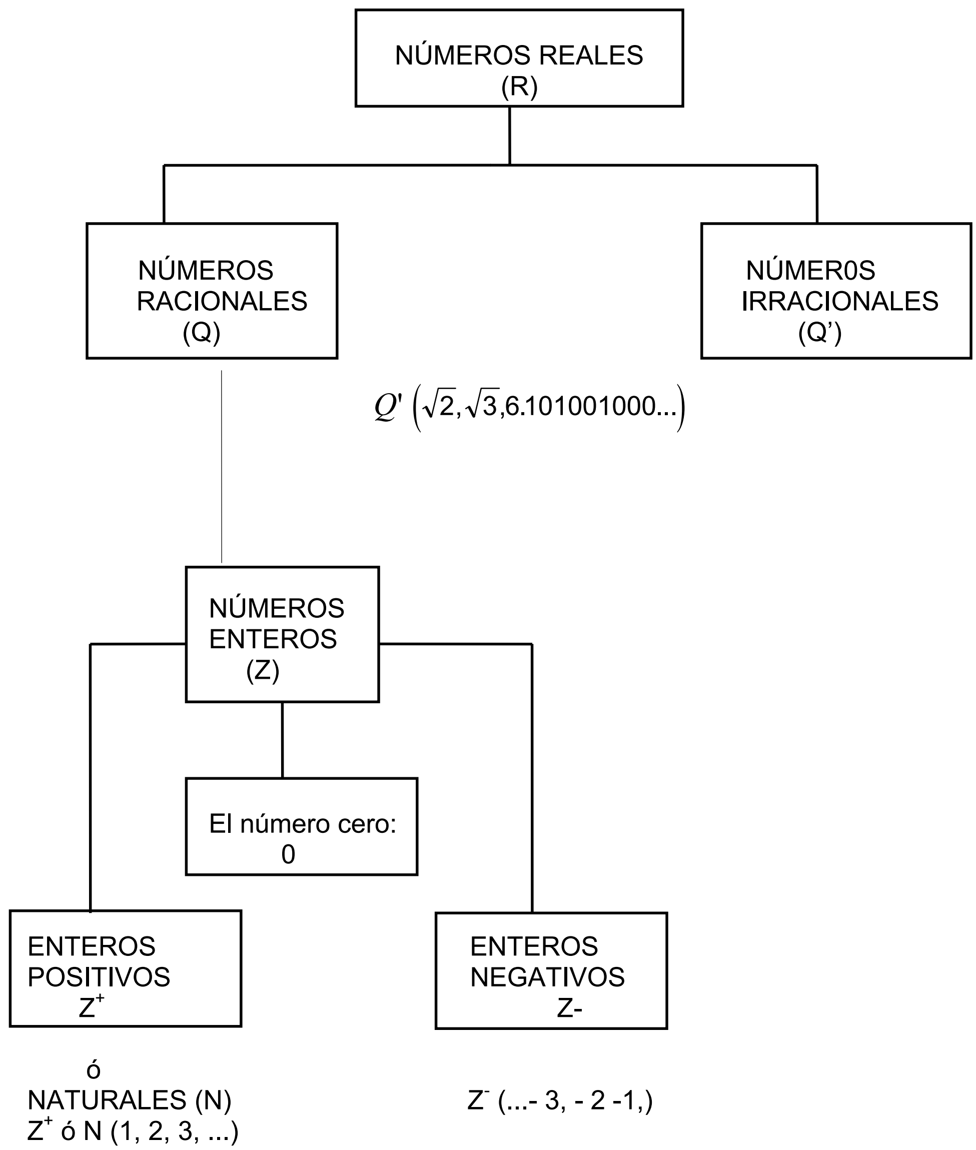
i) $\frac{1}{2} \bullet \left(\frac{7}{8} \bullet \frac{7}{5}\right)$

j) $\left(\frac{1}{2} \div \frac{7}{8}\right) \bullet \frac{7}{5}$

k) $\left(\frac{3}{4} \div \frac{1}{7}\right) \div \frac{2}{5}$

EXPLICACIÓN INTEGRADORA

Hasta aquí se han revisado las operaciones con los números reales sus propiedades y los algoritmos, el siguiente diagrama muestra la clasificación de los números reales y las relaciones entre los diferentes subconjuntos de números.


NÚMEROS REALES
(R)
NÚMEROS
RACIONALES
(Q)
NÚMER0S
IRRACIONALES
(Q')
$Q'\left(\sqrt{2},\sqrt{3},6.101001000...\right)$
NÚMEROS
ENTEROS
(Z)
El número cero:
0
ENTEROS
POSITIVOS
Z^+
ENTEROS
NEGATIVOS
Z-
ó
NATURALES (N)
Z^+ ó N (1, 2, 3, ...)
Z^- (...- 3, - 2 -1,)

1.2 OPERACIONES CON SIGNOS DE AGRUPACIÓN

Como ya sabes, el conjunto de los números reales en sus operaciones de adición y multiplicación cumplen con las propiedades de campo; la utilización de estas propiedades así como los algoritmos de las operaciones te permiten resolver situaciones como las siguientes:

1) Si cobraras por realizar un trabajo \$100000.00, y el material que empleaste costó \$13000. ¿Cuánto ganarías por horas si el trabajo lo terminas en seis horas?

Para contestar la pregunta, primero tendrías que restar el costo del material a la cantidad que cobrarías y en seguida dividir ese resultado entre el número de horas trabajadas para obtener el monto por hora, o sea:

100000 - 13000 = 87000 → costo real del trabajo, entonces:
87000/6 = 14500 ganancia por hora

Como observas, para obtener el resultado realizaste dos operaciones, las cuales se representan de la siguiente manera:

En donde la sustracción de 100000 y 13000 se debe dividir entre 6 para encontrar el resultado.

2) Si un comerciante compra 80 piezas de lechuga a \$300 cada una y vendió 75 de ellas a razón de \$600 la pieza y desechó el resto, ¿cuánto obtuvo de ganancia?

Para resolver este problema tendrás que determinar el costo de las 80 lechugas, restárselo al total de la venta de las 75 lechugas vendidas y a este resultado restarle el costo de las 5 de desecho, o sea:

80 x 300 = 24000 ..... costo de la compra
75 x 600 = 45000 ...... total de la venta
5 x 300 = 1500 ...... total del desecho
ganancia = [(75) (600) - (80) (300)] - 5 (300)
= [45000 - 24000]- 1500 = 21000 - 1500 = \$19,500

Como observas en los dos ejemplos anteriores, se realizó más de una operación aritmética, las cuales se agruparon y utilizaron algunos símbolos para representarlas.

Estos símbolos son los paréntesis ( ), los corchetes [ ] y las llaves{}, se les llama *símbolos de agrupación* y se usan para señalar de una manera más sencilla más de una operación, al indicar el orden preciso en que se deben efectuar. Cuando se escribe 300 + 25 como (300 + 25), se considera la suma de 300 + 25 como una cantidad; la expresión 500 - (60 + 70) significa que la suma de 60 y 70 se va a restar de 500.

¿Cómo expresarías el enunciado tres veces la suma de 3 y 7 menos cuatro veces la suma de 5 y 40?

Solución:

$$3(3 + 7) - 4(5 + 40) =$$

donde el resultado se puede obtener de la siguiente manera:

a) Si utilizas la propiedad distributiva, tendrás:

$$\begin{aligned} 3(3 + 7) - 4(5 + 40) &= (3)(3) + (3)(7) - (4)(5) - (4)(40) \\ &= 9 + 21 - 20 - 160 \\ &= 30 - 180 \\ &= -150 \end{aligned}$$

b) o bien

$$\begin{aligned} 3(3 + 7) - 4(5 + 40) &= 3(10) - 4(45) \\ &= 30 - 180 \\ &= -150 \end{aligned}$$

De los ejemplos anteriores se pueden mencionar algunas sugerencias prácticas para realizar operaciones con números reales donde se involucren signos de agrupación.

Las cantidades o números agrupados se deben considerar como todo

Ejemplo:

$$6 + (2 \bullet 5)$$

Indica que la multiplicación 2 por 5 se efectúa primero y el producto se suma con 6 y da como resultado 16.

$$\begin{aligned} 6 + (2 \bullet 5) &= 6 + (2 \bullet 5) = 6 + 10 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Por lo regular, la multiplicación de los números reales se representan con un punto intermedio o con los signos de agrupación.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 4(3 + 6) &= 4(3 + 6) \\ &= 4(9) \\ &= 36 \end{aligned}$$

Cuando un signo de agrupación está precedido por un signo positivo (más), los signos de los términos no se alteran, cuando va precedido por un signo negativo (menos) los términos si cambian de signo.

Ejemplos:

a) $[(1)\,(7)\,(4) + (7 - 5)] - (12 - 6) + \left(\frac{42}{6}\right) = [28 + 2] - 6 + 7$

$= 28 + 2 - 6 + 7$

$= 31$

b) $5 - \{6 - [(6 - 2) - (4 - 0)] - 6(1 + 3 - 0) + (-2)\,(6 - 3)\} =$

$5 - \{6 - [4 - 4] - 6\,(4) + (-2)\,(3)\}$

$5 - \{6 - [0] - 24 - 6\} =$

$5 - \{6 - 0 - 24 - 6\} =$

$5 - 6 + 0 + 24 + 6 = 29$

Utiliza las sugerencias para eliminar signos de agrupación y vamos a resolver los siguientes ejemplos:

c) **5 - 2(8 - 3) = 5 - 2(5) simplifica el paréntesis primero.**

= 5 - 10 realiza primero la multiplicación antes de restar.

= - 5

Nota: Pudiste eliminar el paréntesis al utilizar la propiedad distributiva y luego restar.

$5 - 2(8 - 3) = 5 - 16 + 6$

$= -5$

Es muy frecuente en este tipo de ejemplos que cometas el siguiente error.

$5 - 2(8 - 3) = 3(8 - 3)$
$= 3(5)$
$= 15$

El error como observas es en restar el 2 de 5, esto no se puede hacer ya que el 2 multiplica al resultado de la operación del paréntesis.

Tienes que distinguir entre operaciones como:

d) 6 - 3(4 + 8) y

e) 6 - 3 + (4 + 8)

La primera expresión te indica que a 6 le vas a sustraer el producto de 3 por la suma de 4 y 8.
Mientras que la segunda expresión te indica simplemente 6 menos 3 más la suma de 4 y 8, al resolver las expresiones tendrás:

$$\begin{aligned} 6 - 3(4 + 8) &= 6 - 3(12) \\ &= 6 - 36 \\ &= -30 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 6 - 3 + (4 + 8) &= 6 - 3 + (12) \\ &= 6 - 3 + 12 \\ &= 15 \end{aligned}$$

f) **5 - 2 [3 - (6 - 2)] =**
1o. Resolver (6 - 2) = 5 - 2 [3 - (4)]
2o. Eliminar paréntesis = 5 - 2[3 - 4]
3o. Resolver $[3-4]$ **= 5 - 2 [- 1]**
4o. Eliminar corchetes = 5 + 2
5o. Resolver 5 + 2 = 7

Multiplica antes de restar y acuérdate de los ejemplos anteriores.

Nota: Puedes aplicar la propiedad distributiva para encontrar el resultado y empezar a simplificar primero los paréntesis, luego los signos de corchetes y al final, si existen, las llaves.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Multiplica antes de restar y acuérdate de los ejemplos anteriores. Puedes aplicar la propiedad distributiva para encontrar el resultado y empezar a simplificar primero los paréntesis, luego los signos de corchetes y al final, si existen, las llaves.

Problemas

1. En los siguientes problemas anota en el cuadro el número que corresponda a una respuesta correcta.

a) 6 + 2 $\boxed{}$ = 0

b) - 3 $\boxed{}$ 2 = 18

c) 2 $\boxed{}$ - 2 [- 3] = 0

d) 4[2 + $\square$] = 20

e) 6 [3+ $\square$] = $\boxed{-6}$

f) 7 $\square$ [- 2 + 5] = - 42

2. Coloca signos de operación (+, -, x, ÷) y paréntesis de tal forma que las siguientes operaciones sean correctas.

Ejemplo:

$$(3 \;\square\; 1) \;\square\; 2 = 1$$

$$(3 - 1) \div 2 = 1$$

a) __ 12 __ __ 4 __ 2 __ 2 __ = 4

b) __ 4 __ 10 __ __ __ 2 __ __ 3 __ __ = 36

c) __ __ 2 __ __ 7 __ 6 __ __ 3 __ __ __ 8 __ 10 __ = 3

d) 8 __ __ __ 6 __ 4 __ __ 2 __ = 4

e) __ 8 __ 6 __ __ __ 4 __ 2 __ = 7

Potencias

Como recordarás, en secundaria calculaste operaciones con potencias y con esto conociste algunas propiedades de esta operación.

Por ejemplo:

$$2^3 = (2)\,(2)\,(2) = 8$$
$$3^4 = (3)\,(3)\,(3)\,(3) = 81$$

Los elementos que componen la utilización de potencias son:

base ——— 2^3 ——— exponente

Ahora extenderemos la utilización de potencias con base negativa

Ejemplo:

$$(-2)^3 = (-2)\,(-2)\,(-2) = -8$$
$$(-3)^4 = (-3)\,(-3)\,(-3)\,(-3) = 81$$
$$(-6)\,(-6)\,(-6) = (-6)^3 = -216$$
$$(-4)\,(-4)\,(-4)\,(-4) = (-4)^4 = 256$$

¿Cuándo una potencia resulta negativa?

Si la base es negativa, ¿cuándo la potencia es positiva?

Ahora, ¿recuerdas cómo se calcula la potencia de un número racional?

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Realiza los siguientes ejercicios:

¿Cuál es el número mayor que puedes formar con tres números**?**

Solución:

Problemas

1. Compara los valores obtenidos al calcular las potencias y encuentra la mayor potencia.

    a) con cuatro números 2
    b) con cuatro números 3
    c) con cuatro números 5
    d) con tres números 9

2. Sigue los pasos y aplica los conocimientos que tienes sobre potencias.

    - Elige cualquier número impar.
    - Encuentra los dos números consecutivos que sumados componen ese número.
    - Eleva esos dos números al cuadrado
    - Calcula la diferencia entre esos dos cuadrados

¿Qué fue lo que obtuviste? ¿Puedes repetir el proceso para otro número impar?

Explica lo que observaste.

3. Calcula las potencias que siguen a continuación.

    a) $(-2)^5 + 2^4 =$

    b) $\frac{-4^3}{5^3} =$

    c) $\frac{2^2 \bullet 3^2}{4^2} =$

d) $\dfrac{-4^5}{3^3} =$

e) $\dfrac{6^2 - 2^2}{3^2} =$

f) $\dfrac{2^{10} \bullet 2^9}{2^4} =$

Si aprendiste a utilizar adecuadamente las propiedades de campo de los números reales, los signos de agrupación y los procedimientos [algoritmos] de solución de las operaciones básicas [adición, sustracción, producto y cociente], realizarás problemas de nivel de abstracción más elevados que te permitirán lograr el objetivo del tema que es *Operar con números reales.*

EXPLICACIÓN INTEGRADORA

Hasta aquí estudiaste:

Los símbolos de agrupación los cuales son: los paréntesis ( ), los corchetes [ ] y las llaves { } y se usan para señalar de una manera sencilla más de una operación, al indicar el orden preciso en que deben efectuarse. Y no olvides que las cantidades o números agrupados se pueden considerar como un todo.

RECAPITULACIÓN

En el siguiente esquema te presentamos una síntesis de los aspectos más relevantes del capítulo que acabas de estudiar, con la intención de que obtengas una idea clara de la secuencia que seguiste en tus aprendizajes, para que puedas entender y manejar estos conocimientos.

Operando con los números reales

- **Orígenes de Algunos Sistemas Numéricos**
  - Necesidad de contar y medir en todas las culturas.
  - Surgimiento de los sistemas numéricos (sistema decimal, fundamentado en los conceptos de base y posición).
- **Métodos y algoritmos**
  - Método de multiplicación por duplicación de los egipcios.
  - Procedimiento de Gauss.
  - Solución de problemas.
- **Los números reales (R)**
  - Conjunto de números naturales (N), enteros (Z), racionales (Q), irracionales (Q′)
- **Propiedades de las operaciones**
  - Asociativa, distributiva, conmutativa, cerradura.
  - Incluyen los signos de agrupación.

ACTIVIDADES INTEGRALES

Después de haber revisado los contenidos de este tema realiza las siguientes actividades, para que verifiques tu aprendizaje.

1. Si realizas una rifa de una libreta estilo francés con 90 números de 1 al 90, ¿cuál sería el monto de la venta de estos números si su precio es el indicado por el número del boleto?. Por ejemplo, si eligen el número 35, su valor será de $35, y así respectivamente.

2. En las siguientes expresiones, establece las propiedades que se aplican.

   a) $25 + 35 = 35 + 25$

   b) $(17 + 13) + 20 = 17 + (13 + 20)$

   c) $16(2 \times 15) = (16 \times 2) \times 15$

   d) $8(11 \times 13) = 8(13 \times 11)$

   e) $100 + 0 = 100$

3. Con base en el significado de la propiedad asociativa, plantea distintas formas de realizar las siguientes operaciones y argumenta por qué los resultados son los mismos:

   $250 + 375 + 220 + 40 =$

   $13 \times 5 \times 7 \times 4 =$

   $126 - 200 - 14 - 18 =$

4. Justifica cada paso en la siguiente operación y nombra la propiedad que se emplea:

$$
\begin{aligned}
(5 + 8) + (6 + 2) &= [(5 + 8) + 6\ ] + 2 \\
&= [5 + (8 + 6] + 2 \\
&= [5 + (6 + 8)] + 2 \\
&= 5 + [(6 + 8) + 2] \\
&= 5 + [6 + (8 + 2)] \\
&= 21
\end{aligned}
$$

5. Realiza las siguientes operaciones con números reales:

a) (- 1) (- 3) =

b) (- 4) (- 7) =

c) (- 3) (+ 8) (9)

d) - [(-5) (- 3) (- 1) (12)] =

e) - 6 (6 + 8) + 8 - 32 + 16 =

f) 3 + 48 - 16 - 3 + 57 =

g) (3 + 45)=

h) [(4 + 3) 2] =

i) $2\left[4+(2\bullet 5)\right]+1=$ =

j) 4 + (2•5) =

k) (- 3) + (- 7) + (- 1) + (4) + (9) + (- 15) =

l) (0) + (1) + (- 1) + (- 16) + (16) =

ll) - [- (- 2) + 3(6 - 8)] [4 - 5 (5 + 2)] =

m) [- (- 2) - 4 (4 - 6)] [3 + (7 - 3)] =

n) [3 - 7(5 - 6)] [- 3(- 2) - 5(- 4)] [- 6 + (5 - 7)] =

o) $\left(-\frac{9}{5}\right)\left[\left(-\frac{3}{9}\right)\left(-\frac{1}{8}\right)\right]$

p) $$\frac{\left\{\left[\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{5}{4}\right)\right]\div\frac{5}{6}\right\}}{\frac{2}{3}\left(\frac{5}{4}\div\frac{5}{6}\right)}$$

q) 67 + [4(3 + 5)] + 2(7 - 2)^3 =

r) (- 5) (- 2) [3 +2(1 - 1)] - 7 (3 + 5) =

AUTOEVALUACIÓN

A continuación se presentan las respuestas de los ejercicios realizados, compáralas con las que obtuviste y rectifica aquellas que sean diferentes.

1. Tu respuesta debe ser (45) • (91) = 4095

2. Las propiedades que aplicaste son:

   a) Conmutativa de la adición

   b) Asociatividad de la adición

   c) Asociatividad de la multiplicación

   d) Conmutatividad de la multiplicación

   e) Identidad aditiva.

3. Si la propiedad asociativa permite asociar o agrupar cantidades de diferente manera, algunas de las formas en que puedes realizar dichas operaciones son las siguientes:

$$\begin{aligned}
250 + 375 + 220 + 40 &= (250 + 375) + (220 + 40) \\
&= 250 + (375 + 220) + 40 \\
&= (250 + 375 + 220) + 40 \\
13 \times 5 \times 7 \times 4 &= (13 \times 5)\,(7 \times 4) \\
&= 13 \times (5 \times 7) \times 4 \\
&= 13 \times (5 \times 7 \times 4) \\
126 - 200 - 14 - 18 &= (126 - 200) - 14 - 18 \\
&= (126 - 200 - 14) - 18 \\
&= 126 + (-200 - 14 - 18)
\end{aligned}$$

4. Asociativa
   Asociativa
   Conmutativa
   Asociativa
   Asociativa
   Cerraduras de la adición

5. a) 3

b) 28

c) -216

d) 180

e) - 92

f) 89

g) 48

h) 14

i) 29

j) 14

k) -13

l) 0

ll) -124

m) 70

n) - 2080

o) $-\frac{3}{40}$

p) $\frac{3}{5}$

q) 349

r) -26

Nota: De las respuestas k) a la r) se te sugiere poner atención en la eliminación correcta de los signos de agrupación y el orden de las operaciones. Recuerda cómo se eliminan los signos.

CAPÍTULO 2

DE LA ARITMÉTICA AL ÁLGEBRA

2.1 MÉTODOS ARITMÉTICOS

2.1.1 Método por Ensayo y Error

2.1.2 Razones y Proporciones

2.1.3 Diagramas de Operaciones

2.2 MODELOS ALGEBRAICOS

PROPÓSITO

En el capítulo anterior operaste con los números reales, y aplicaste las propiedades de sus operaciones.

Para este capítulo:

¿QUÉ APRENDERÁS?

Al valorar la importancia del álgebra para la solución de problemas que con la aritmética son más laboriosos de resolver.

¿CÓMO LO APRENDERÁS?

Comparando los métodos aritméticos y los algebraicos; analizando los ejemplos que se incluyen en el contenido, y desarrollando las actividades que se proponen.

¿PARA QUÉ TE VA A SERVIR?

Para identificar los modelos algebraicos como una herramienta que nos ahorran tiempo y esfuerzo en la solución de problemas concretos.

CAPÍTULO 2

DE LA ARITMÉTICA AL ÁLGEBRA

2.1 MÉTODOS ARITMÉTICOS0

Generalmente aprendemos matemáticas como un proceso mecánico, donde lo único que se requiere es sumar, restar, multiplicar o dividir dos cantidades; sin embargo, las matemáticas son la base del razonamiento y toma de decisiones en muchas de nuestras actividades, simplemente si tuviéramos prisa, ¿cómo tomaríamos la decisión de aplicar un procedimiento u otro para concluir una actividad, sin calcular el tiempo que nos lleva cada alternativa? en este caso nos auxilia la aritmética, que es una área de las matemáticas con las que te has relacionado desde que conociste los números para realizar operaciones con ellos.

Ahora bien, en ocasiones nos enfrentamos a problemas que con la aritmética es muy laborioso solucionar, porque no tenemos todos los datos, y por consecuencia no podemos tomar una decisión certera.

En estos casos nos auxilia el álgebra, por ejemplo: Imagínate que te ofrecen trabajo de vendedor en dos compañías; en la primera te ofrecen un sueldo base de $ 500.00 mensuales, más el 4% de comisión sobre las ventas totales del mes; y en la segunda únicamente el 7% de comisión sobre las ventas totales del mes. Además sabes que el promedio de ventas en un mes supera los $10,000.00 por vendedor y que tú eres muy hábil en este tipo de trabajos. ¿Por qué compañía te decidirías?

Si no sabes álgebra seguramente aceptarías la oferta de la primer compañía, pero si tienes conocimientos algebraicos, antes de decidir harías algunos cálculos, que te ayudarían a tomar la decisión más certera.

Pero iniciemos analizando las ventajas del álgebra, para lo cual es necesario conocer los alcances de los métodos aritméticos como son: El Método de Ensayo y Error que nos permitirá ejercitar las operaciones aritméticas, aplicadas a la resolución de problemas. El Método de Razones y Proporciones nos ayudará a rescatar nuestros conocimientos de proporcionalidad. Finalmente el Método de Diagramas de Operaciones que establece el puente para llegar al álgebra.

2.2.1 MÉTODO POR ENSAYO Y ERROR

Para solucionar un problema por el método de ensayo y error, necesitamos intentar encontrar el valor correcto resolviéndolo con cantidades aproximadas, si con la primera el resultado es mucho menor del que esperamos, debemos aumentarla y si se excede, debemos disminuirla.También es indispensable que leamos, las veces que sea necesario el planteamiento del problema para definir: qué datos tenemos, qué es lo que necesitamos encontrar, y qué procedimiento podemos aplicar. Recuerda también que para resolver un problema aritmético, únicamente requieres de las operaciones básicas y analizarlo correctamente.

EJEMPLO

Se tiene un terreno cuadrado cuyos lados miden 30 metros y se tiene bardeada una porción rectangular de 20 metros de largo por 8 de ancho. Si se quiere ampliar el área bardeada a 364 m^2, además aumentar la misma longitud en su largo como en su ancho, ¿qué longitud se debe ampliar la barda en cada lado?

Para tener una mejor idea del problema que se plantea, podemos recurrir a la figura 2.

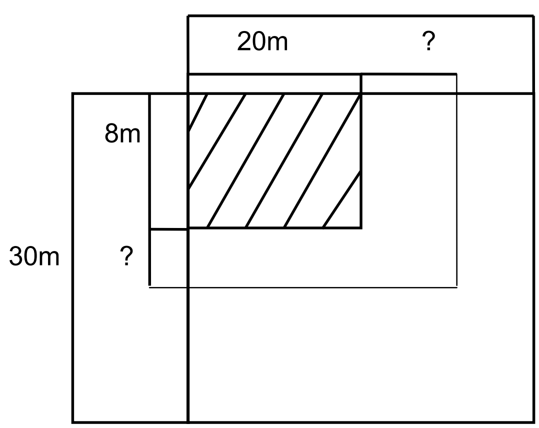


Figura 2. El área sombreada corresponde a la actualmente bardeada. La línea punteada delimita el área deseada. ¿A cuánto corresponde la longitud ampliada?

Antes de continuar, recuerda que para calcular el área de un rectángulo, multiplicamos la longitud del largo por la del ancho. Así, el área que actualmente está bardeada es de 160 m^2 y el área que deseamos obtener, es 364 m^2. Como debemos obtener estas nuevas longitudes al sumar la misma cantidad al ancho y largo actuales, para resolver el problema tenemos que encontrar un número tal, que al sumarlo a 20 y 8, el producto de los resultados respectivos sea 364.

Podemos enfrentar este problema de diversas maneras, por el momento lo vamos a hacer con el método de ensayo y error que consiste en ir probando o ensayando varios valores hasta llegar al resultado correcto.

<u>Sumemos 1</u> a cada una de las longitudes y multipliquemos los resultados obtenidos:

$$\mathbf{(20 + 1) \times (8 + 1) = 21 \times 9 = 189}$$

Esta cantidad es menor a la deseada.

<u>Sumemos entonces 2</u> a cada una de las longitudes y multipliquemos los resultados obtenidos:

$$\mathbf{(20 + 2) \times (8 + 2) = 22 \times 10 = 220}$$

que es todavía menor que la cantidad requerida.

<u>Sumemos ahora 10</u> a cada una de las longitudes y multipliquemos los resultados obtenidos nuevamente:

$$\mathbf{(20 + 10) \times (8 + 10) = 30 \times 18 = 540}$$

que es mayor que la cantidad requerida.

Esto es, si aumentamos 2 metros a cada lado, obtenemos un área de 220 m^2 y si aumentamos 10 metros a cada lado obtenemos un área de 540 m^2. Como al aumentar la longitud de los lados aumenta el área y el área que buscamos está entre 220 y 540, el número que buscamos debe estar entre 2 y 10.

<u>Hagamos la prueba con 5</u>:

$$\mathbf{(20 + 5) \times (8 + 5) = 25 \times 13 = 325}$$

que es todavía menor que 364. así que probaremos con otro número que sea mayor que 5 y menor que 10. Ya que 325, el valor correspondiente a 5, está más cercano a 364 que lo está 540, el valor correspondiente a 10, probaremos con un número que sea más cercano a 5 que a 10.

<u>Hagámoslo con 6</u>:

$$\mathbf{(20 + 6) \times (8 + 6) = 26 \times 14 = 364}$$

que es el área que buscamos. Así, para resolver el problema se requiere de aumentar 6 metros a la longitud del largo y del ancho, respectivamente.

EJEMPLO

Una compañía arrendadora de automóviles cobra por la renta de un auto $120.00 pesos diarios, más $ 2.00 pesos por kilómetro recorrido; otra compañía cobra por la renta del mismo auto $ 80:00 pesos diarios, más $ 2.50 pesos por kilómetro recorrido. ¿Cuántos kilómetros se deben recorrer diariamente para que la renta del automóvil sea la misma en la dos compañías?

Resolveremos el problema nuevamente por el método de ensayo y error. Consideremos varios valores, correspondientes a kilómetros recorridos para calcular el costo respectivo en cada una de las compañías.

<u>Con 50 kilómetros</u>:

Costo en la primera compañía:

$$\mathbf{120.00 + 50 \times 2.00 = 120.00 + 100.00 = 220.00}$$

Costo en la segunda compañía:

$$\mathbf{80.00 + 50 \times 2.5 = 80.00 + 125.00 = 205.00}$$

En este caso el costo en la primera compañía es mayor que en la segunda.

<u>Con 60 kilómetros</u>:

Costo en la primera compañía:

$$\mathbf{120.00 + 60 \times 2.00 = 120.00 + 120.00 = 240.00}$$

Costo en la segunda compañía:

$$\mathbf{80.00 + 60 \times 2.5 = 80.00 + 150.00 = 230.00}$$

En este caso, nuevamente, el costo es mayor en la primera compañía que en la segunda.

<u>Con 70 kilómetros</u>:

Costo en la primera compañía:

$$\mathbf{120.00 + 70 \times 2.00 = 120.00 + 140.00 = 260.00}$$

Costo en la segunda compañía:

$$\mathbf{80.00 + 70 \times 2.50 = 80.00 + 175.00 = 255.00}$$

Todavía el costo es mayor en la primera compañía que en la segunda. Para tener una mejor visión del problema resumiremos los datos en una tabla.

Kilómetros Recorridos	Costo en la Primera Compañía	Costo en la Segunda Compañía
50	220.00	205.00
60	240.00	230.00
70	260.00	255.00

Tabla 1. La primera columna corresponde a los kilómetros recorridos, la segunda el costo de rentar el automóvil en la primer compañía al recorrer el número de kilómetros indicado en cada renglón, y la tercera, el costo que tiene rentarlo en la segunda compañía al recorrer, también, el número de kilómetros indicado en cada renglón.

Como puedes observar, el tener concentrados los datos relevantes del problema en la tabla nos puede ayudar a analizarlos.

De estos datos observamos que cuando crece el número de kilómetros recorridos, los dos costos también crecen. Asimismo vemos que el costo en la primer compañía es mayor que en la segunda, aunque <u>la diferencia entre los dos costos disminuye</u> cuando aumentamos el número de kilómetros. Si analizas con cuidado la tabla te darás cuenta que por cada 10 kilómetros que se aumenta, los costos para la primera compañía aumenta 20.00 pesos y los de la segunda 25.00 pesos. De esta manera podemos obtener calcular valores, sin tener que hacer tantos cálculos.

Consideremos nuevos valores para los kilómetros recorridos, 80, 90, 100 y 110 por ejemplo, calculemos los dos costos correspondientes para cada uno de ellos, al aumentar de 20.00, en 20.00 en la primera columna y de 25.00 en 25.00 en la segunda concentremos los datos en la tabla y aumentemos cuatro renglones a la tabla anterior.

Kilómetros Recorridos	Costo en la Primera Compañía	Costo en la Segunda Compañía
50	220.00	205.00
60	240.00	230.00
70	260.00	255.00
80	280.00	280.00
90	300.00	305.00
100	320.00	330.00
110	340.00	355.00

Tabla 2. Se aumentaron los renglones correspondientes a 80, 90, 100 y 110 km recorridos. Se calculó el costo para la primer compañía al aumentar de 20 en 20 pesos, y para la segunda de 25 en 25.

Como puedes observar, el kilometraje que se requiere para que el costo de la renta sea igual en las dos compañías es 80. Además, observa que cuando el número de kilómetros es mayor que 80, el costo de la renta en la segunda compañía es ahora mayor que en la primera y que la diferencia crece.

Ahora observa que el método de ensayo y error, nos sirve para solucionar problemas donde nos hace falta un dato, y lo que tenemos que hacer es aproximarnos con diversos valores y comparar los resultados obtenidos hasta encontrar el correcto ¿Te pareció muy complicado el procedimiento? ¿Crees que exista una forma más sencilla para solucionarlos?

2.1.2 RAZONES Y PROPORCIONES

El método de razones y proporciones se aplica como un *auxiliar del método de ensayo y error*, en problemas donde *dos datos están relacionados*, y se pueden expresar como una fracción, para *obtener un tercer dato que también está relacionado* y se conoce como constante o coeficiente de proporcionalidad.

Recuerda que antes de analizar el procedimiento de resolución para los ejemplos que se plantean, debes intentar solucionarlos y comparar el procedimiento que realizaste con el que aparece en el fascículo.

EJEMPLO

La inflación en los últimos tres años fue de 35%, 20% y 13 % respectivamente ¿Cuál era el precio de un artículo hace tres años si ahora cuesta $338.66? si suponemos que su precio ha crecido al mismo ritmo que la inflación.

Para aclarar el problema revisa la tabla 3.

INFLACIÓN		
DE HACE	A HACE	%
3 años	2 años	35
2 años	1 año	20
1 año	A la actualidad	13

Tabla 3. Los últimos tres años abarcan el actual, el anterior y el de hace dos. La inflación se determina en función del año anterior.

Este problema lo podemos solucionar desde diversos métodos, sin embargo, primero lo abordaremos desde el método de ensayo y error, para lo cual se calcula la devaluación de 100 y 200 pesos de hace 3 años, considerando los porcentajes inflacionarios.

Para calcular la inflación de $100.00 analiza la siguiente tabla:

TIEMPO	VALOR DE $100.00
Hace 3 años	**$100.00**
Hace 2 años	**100.00 + 35%**
Hace 1 año	**(100.00 + 35%) + 20%**
Actualmente	**[(100.00 + 35%) + 20%]+ 13%**

Tabla 4. En la segunda columna aparece como se incrementó el valor de los $100.00 de acuerdo a la inflación.

Hace dos años:

Para obtener el valor que conforme a la inflación tomaron hace dos años los 100.00 pesos de hace tres años, le sumamos la cantidad correspondiente al porcentaje de inflación de ese año (35%).

$$100.00 + 0.35\ (100.00) = 135.00 \qquad (1)$$

reagrupamos, en vista de la propiedad distributiva*,

$$(1 + 0.35)\ (100.00) = 135.00 \qquad (1')$$

Hace un año:

De la misma manera, para obtener el equivalente que conforme a la inflación tomaron hace un año los 135,000 pesos de hace dos, sumamos la cantidad correspondiente al porcentaje de inflación de ese año (20%).

$$135.00 + 0.20\ (135.00) = 162.00 \qquad (2)$$

$$(1 + 0.20)\ (135.00) = 1.20\ (135.00) = 162.00 \qquad (2')$$

* Recuerda que para sumarle un X% a una cantidad, se multiplica la cantidad por 1.X dado que 1 corresponde 100% y X al porcentaje que se le suma.

Este año:

Para calcular el valor actual procederemos en forma análoga.

$$162.00 + 0.13(162.00) = 183.06 \qquad (3)$$

$$(1 + 0.13)\ (162.00) = 1.13\ (162.00) = 183.06 \qquad (3')$$

Se hicieron los cálculos cuando se multiplicaron las cantidades por 1.35, 1.20 y 1.13 respectivamente.

Ahora procedamos a calcular el costo actual de 200 pesos.

Así para calcular a cuánto eran equivalentes hace dos años, de acuerdo con el índice de inflación, 200.00 de hace tres, multiplicamos 200.00 por 1.35.

$$1.35(200.00) \qquad (4)$$

Observamos que:

$$200.00 = 2(100.00) \qquad (5)$$

Entonces:

$$1.35(200.00) = 1.35\ (200.00) = 1.35\ (2(100.00)) \qquad (6)$$

Al reagrupar:

$$\mathbf{1.35\,(2(100.00)) = 2(1.35(100.00)} \qquad (7)$$

O sea, que el valor correspondiente de hace dos años, de acuerdo a la inflación, de los 200.00 pesos de hace tres años, es el doble del correspondiente a 100.00

Para calcular los valores para hace un año y para este año, duplicamos los encontrados para 100.00 respectivamente.

Hace un año:

$$\mathbf{2(162.00) = 324.00}$$

Este año:

$$\mathbf{2(183.06) = 366.12}$$

Al resumir los resultados anteriores diremos que 200.00 es el doble de 100.00 y que también los valores correspondientes a 200.00, respecto a la inflación (270; 324.00; 366.12) son el doble de los que toma 100.00 (135.00; 162.00; 183.06) respectivamente.

Decimos entonces que los dos conjuntos de valores son proporcionales y los escribimos:

Hace tres años	**200.00 = 2(100.00)**
Hace dos años	**270.00 = 2(135.00)**
Hace un años	**324.00 = 2(162.00)**
Este año	**366.12 = 2(183.06)**

O bien:

$$\frac{200.00}{100.00} = \frac{270.00}{135.00} = \frac{324.00}{162.00} = \frac{366.12}{183.06} = 2$$

En este caso al número dos le llamamos el coeficiente de proporcionalidad.

Al repetir el proceso anterior veremos que si en lugar de 200.00 tomamos otra cantidad, los valores obtenidos también serán proporcionales con los correspondientes a 100.00. Por ejemplo, sabemos que 50.00 es la mitad de 100.00, luego, 50.00 pesos de hace tres años equivalen según la inflación a:

Hace dos años:

$$\frac{1}{2}(135.00) = 67.50$$

Hace un año:

$$\frac{1}{2}(162.00) = 81.00$$

Este año:

$$\frac{1}{2}(183.06) = 91.53$$

En este caso $\frac{1}{2}$ es el coeficiente de proporcionalidad.

Retomemos el problema original, que era encontrar el valor que tenían 338.66 pesos actuales, hace tres años. Apoyándonos en los valores que hemos encontrado podemos calcular el coeficiente de proporcionalidad.

Para tener una mejor visión del problema resumimos los datos en la siguiente **tabla:**

HACE TRE AÑOS	HACE DOS AÑOS	HACE UN AÑO	ESTE AÑO
$ 50.00	**$ 67.50**	**$ 81.00**	**$ 91.53**
100.00	**135.00**	**162.00**	**183.06**
?	**?**	**?**	**338.66**
200.00	**270.00**	**324.00**	**366.12**

Tabla 5.

Para calcular el coeficiente de proporcionalidad para 338.66 pesos actuales, podemos dividir dicha cantidad entre cualquier valor de este año.

Calculemos el coeficiente de proporcionalidad:

$$\frac{338.66}{183.06} = 1.85$$

o sea que:

$$\mathbf{338.66 = 1.85\ (183.06)}$$

Como los valores del segundo y tercer renglón deben ser proporcionales y por la igualdad anterior sabemos que el coeficiente de proporcionalidad es 1.85, para calcular los valores del tercer renglón basta con multiplicar por 1.85 los del segundo:

$$\mathbf{185.00 = 1.85(100.00)}$$
$$\mathbf{249.75 = 1.85(135.00)}$$
$$\mathbf{299.70 = 1.85(162.00)}$$

y para completar la **tabla 6** con estos valores tenemos:

HACE TRES AÑOS	HACE DOS AÑOS	HACE UN AÑO	ESTE AÑO
$ 50.00	**$ 67.50**	**$ 81.00**	**$ 91.53**
100.00	**135.00**	**162.00**	**183.00**
185.00	**249.75**	**299.70**	**338.66**
200.00	**270.00**	**324.00**	**366.12**

Tabla 6

Hemos visto como la proporcionalidad nos ayudó a resolver el problema. Tal vez en este momento te puede parecer, que sin usarla hubiera sido más fácil; esto se debe en parte a que, en el curso del mismo, se introdujo el concepto de proporcionalidad, pero para llegar a que los $338.66 son equivalentes a $185,00 de hace tres años, tendríamos que haber hecho muchos más cálculos si únicamente hubiéramos aplicado el método de ensayo y error.

Resolveremos ahora el siguiente problema con el método de ensayo y error, nos apoyaremos en el concepto de proporcionalidad. Puedes observar cómo su uso nos ahorra mucho trabajo.

EJEMPLO

En 1980 la población del estado de Sonora tenía aproximadamente 1’500,000 habitantes. si suponemos que la tasa media de crecimiento de 1975 a 1980 fue el 5% anual. ¿Cuántos habitantes tenía en 1975 y cuál fue el último año que tuvo este estado menos de 1’250,000?

Calcularemos el crecimiento de diferentes poblaciones, con la misma tasa de crecimiento que la enunciada en el problema. Si partimos de una población de 1’000,000 habitantes en 1975, tendremos:

1976:

1’000,000 + 0.05 (1’,000,000) = 1’000,000 + 50,000 = 1’050,000

Antes de continuar, obtengamos una forma más simple de hacer los cálculos:

$$\begin{aligned} \mathbf{1'000{,}000 + 0.05\ (1'000{,}000)} &= \mathbf{(1 + 0.05)\ (1'000{,}000) =} \\ &= \mathbf{1.05\ (1'000{,}00) = 1'050{,}000} \end{aligned}$$

Así, para calcular la población después de un año, si la tasa de crecimiento es de 5% anual, se multiplica el número de pobladores por 1.05.

1977:

$$\mathbf{1.05\ (1'050{,}000) = 1'102{,}500}$$

1978:

$$\mathbf{1.05\ (1'102{,}500) = 1'157{,}625}$$

1979:

$$\mathbf{1.05\ (1'157{,}625) = 1'215{,}506.2}$$

1980:

$$\mathbf{1.05\ (1'215{,}506.2) = 1'276{,}281.5}$$

A pesar de que para los dos últimos años el resultado fue un número no entero y de que no podemos tener un número no entero de personas, para efectuar los cálculos usaremos estos números.

Aunque solamente tengamos los valores correspondientes a una población de 1'000,000 habitantes en 1975, empecemos a construir la tabla para tener mayor claridad, en ella no consignamos la parte decimal de los números correspondientes a 1979 y 1980.

1975	**1976**	**1977**	**1978**	**1979**	**1980**
1,000,000	**1,050,000**	**1,102,500**	**1,157,625**	**1,215,506**	**1,276,281**

Tabla 7.

Añadimos un renglón en la tabla, aquél que corresponde al valor 1'500,000 en 1980.

1975	**1976**	**1977**	**1978**	**1979**	**1980**
1,000,000	**1,050,000**	**1,102,500**	**1,157,625**	**1,215,506**	**1,276,281**
?	**?**	**?**	**?**	**?**	**1,500,000**

Tabla 8

Los valores del segundo renglón son proporcionales a los del primer renglón (¿por qué?), por lo tanto, si calculamos el coeficiente de proporcionalidad calcularemos los valores que hacen falta.

$$\frac{1{,}500{,}000}{1{,}276{,}281} = 1.175$$

La constante de proporcionalidad es entonces **1.175.**

Para conocer cuántos habitantes había en 1975, multiplicamos 1,000,000 por 1.175:

1.175 (1,000,000) = 1,175,000

Si solamente quisiéramos saber cuantos habitantes había en 1975, ya hubiéramos terminado; pero como también queremos saber cuándo fué el último año que hubo menos de 1,250,000; efectuamos entonces los demás cálculos:

1.175 (1,050,000) = 1,233,750
1.175 (1,102,500) = 1,295,437

En este momento ya podemos responder la segunda pregunta, por lo que no necesitamos seguir calculando. El último año que hubo menos de 1'250,000 habitantes fue en 1976, no fue necesario por tanto, terminar de llenar la tabla.

1975	1976	1977	1978	1979	1980
1,000,000	1,050,000	1,102,500	1,157,625	1,215,506	1,276,281
1,175,000	1,233,750	1,295,437	?	?	1,500,000

Tabla 9.

En la resolución del problema anterior, viste que efectivamente el uso de la proporcionalidad nos ahorró bastante trabajo, de hecho solamente hubo que ensayar con un valor y después hicimos uso de ella, para calcular directamente, por medio de la constante de proporcionalidad, los valores que buscábamos.

Puedes ahora preguntarte, *¿podemos aplicar la proporcionalidad para resolver todos los problemas que hemos visto?,* y si no es así, *¿cómo podremos saber cuándo hacer uso de ella?*.

Observe el siguiente ejemplo:

EJEMPLO

Se tiene un terreno cuadrado cuyos lados miden 30 metros, se tiene bardeada una porción rectangular de 20 metros de largo por 8 de ancho. Si se quiere ampliar el área bardeada a 364 m^2 y aumentar la misma longitud en su largo como en su ancho, ¿qué longitud se debe ampliar la barda en cada lado?

LARGO	ANCHO	ÁREA
20	8	160
21	9	189
22	10	220
25	13	325
26	14	364
30	18	540

Para ello calculamos los cocientes $\Rightarrow \quad \frac{20}{26}, \frac{8}{14}, \frac{160}{364}$

$$\frac{20}{26} = 0.769$$

$$\frac{8}{14} = 0.571$$

$$\frac{160}{364} = 0.439$$

Ya que los cocientes no son iguales, los renglones no son proporcionales y no podemos, por tanto, resolver este problema usando la proporcionalidad.

Observa que el método de razones y proporciones, únicamente lo podemos aplicar cuando se determina el coeficiente de proporcionalidad. ¿Te pareció más sencillo este método que el de ensayo y error?. ¿Cuál es la razón?.

2.1.3 DIAGRAMAS DE OPERACIONES

Hasta ahora hemos visto como resolver aritméticamente ciertos problemas con el método de ensayo y error. Nos apoyamos en ocasiones, cuando el problema lo permite, en la proporcionalidad. Es importante insistir en que estos problemas tienen una importante diferencia, con aquellos que estábamos acostumbrados a resolver. Por lo general, siempre teníamos que calcular o encontrar una cierta cantidad y era claro qué operaciones había que realizar con los datos numéricos del problema.

Por ejemplo: si nos encontrábamos de viaje en alguna ciudad de los Estados Unidos de Norteamérica y el costo de una comida fue de 23 dólares, es claro que, para saber cual fue su costo en pesos mexicanos, bastaría con multiplicar 23 por el número de pesos que cuesta comparar un dólar (lo que usualmente se conoce como *el tipo de cambio peso-dólar*).

Esto es, operábamos con cantidades conocidas y nos interesábamos por el resultado de operar con ellas. En los problemas que hemos planteado en este fascículo, conocemos los resultados de ciertas operaciones y lo que nos interesa es saber la cantidad de que partimos.

Por ello en los problemas que ahora queremos resolver, no es tan claro qué operaciones aritméticas debemos realizar con los datos numéricos del problema, para encontrar la cantidad de que partimos. De hecho, como se vio, tuvimos que hacer "algo más" que operaciones aritméticas. Este "algo" adicional fue la implementación de un método para resolverlos. Este método, como ya hemos dicho, se conoce usualmente como el método de prueba y error o ensayo y error. como te podrás dar cuenta, el nombre del método es muy descriptivo, máxime si recuerdas que para encontrar la cantidad deseada, probábamos con algunos valores hasta que encontrábamos aquel que satisficiera las condiciones del problema, es decir, hasta que ya no hubiera error. Aún cuando en algunos casos este método puede resultar seguro, en algunos otros puede ser inútil o cuando menos excesivamente laborioso.

El siguiente es un ejemplo donde se determinarán las operaciones que hay que realizar con los datos numéricos, para llegar a la cantidad de que partimos, no es tan sencillo y resolverlo por el método de ensayo y error es tardado y, como ya se ha dicho, laborioso.

EJEMPLO

Pedro pensó un número, que multiplicó por 2; al resultado le sumó 5 para después dividir por 5, restar 1, multiplicar por 8 y, finalmente, sumar 7. El resultado que obtuvo fue el número 39. ¿Cuál es el número que pensó Pedro?

Resuelve el problema por el método de ensayo y error. Una vez que lo hayas hecho, lee el método de solución que te proponemos.

Para resolver este problema pensaremos lo siguiente: ¿podemos saber cuál es el número que obtuvo Pedro antes de realizar la última operación (sumar 7) y cuyo resultado le dio 39? Es decir, ¿cuál es el número que al sumarle 7 da 39? No cuesta mucho trabajo convencerse de que, para obtener este número, basta con que a 39 le restemos 7 (lo inverso de sumar 7). Así pues, como $39 - 7 = 32$, ya sabemos que el resultado que obtuvo Pedro, después de haber realizado las primeras cinco operaciones fue 32.

Ahora nos preguntaremos: ¿Cuál es el número que Pedro obtuvo antes de multiplicar por 8 y cuyo resultado le dio 32?. Es decir, ¿cuál es el número que multiplicado por 8 da 32?. Como en el caso anterior, es fácil darse cuenta que, para encontrar este número, basta con que a 32 lo dividamos por 8 (lo inverso de multiplicar por 8) de modo que, como $32/8 = 4$, llegamos a la conclusión de que 4 fue el resultado que Pedro obtuvo después de realizar las primeras cuatro operaciones con el número que pensó.

Seguramente a estas alturas, ya te diste cuenta del método que empleamos para encontrar cada uno de los números que Pedro obtuvo conforme realizó las operaciones, y de este modo llegar al número inicial. De hecho, nuestro problema queda ilustrado gráficamente de la siguiente manera:

	x 2		+ 5		÷ 5		- 1		x 8		+ 7	
?		?		?		?		?		?		39

y el método que usamos para resolverlo es de la siguiente forma:

	÷ 2		- 5		x 5		+ 1		÷ 8		- 7	
10		20		25		5		4		32		39

Como podrás observar, de esta manera es fácil determinar cuales son las operaciones, que hay que realizar con los datos numéricos del problema. A los diagramas construidos les llamaremos *diagramas de operaciones.*

Compara ahora la manera en que solucionamos el problema por medio de los diagramas de operaciones, con la manera en que lo hiciste con el método de ensayo y error. Podrás darte cuenta, en primer lugar, de que el número de operaciones que tuviste que realizar fue bastante menor, a menos que el primer número que hayas escogido para probar haya sido 10, lo cual sería realmente una casualidad.

En segundo lugar, verás que la manera de resolver el problema se aplica a cualquier otro número, para el cual el problema tenga solución. Así, si se tiene el número 55 como resultado de efectuar las operaciones descritas con un número, que se pensó al aplicar el método del diagrama de operaciones se obtiene:

	÷ 2		- 5		x 5		+ 1		÷ 8		- 7	
15		30		35		7		6		48		55

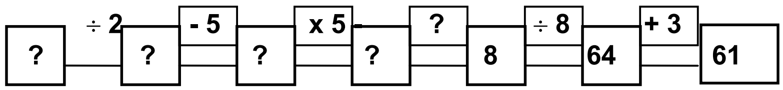
Desafortunadamente, con el método anterior no es posible resolver una buena variedad de los problemas, que enfrentamos. Más aún, si hacemos una pequeña modificación al ejemplo te darás cuenta que el método que empleamos ya no funciona.

EJEMPLOS

Pedro pensó un número al cuál multiplicó por 2, al resultado le sumó 5, para después dividir por 5, sumar el número que pensó, multiplicar por 8 y finalmente restar 3 y obtendrás como resultado el número 61. ¿Cuál es el número que pensó Pedro?

Si aplicamos el método empleado en el problema anterior, llegamos a un punto en el cual ya no podemos avanzar.

Esto se ve más claramente en el siguiente diagrama:



El método de diagramas de operaciones únicamente requiere saber cuál es la operación inversa que corresponde ¿Crees que exista una forma más sencilla de resolver este tipo de problemas? ¿Cómo te imaginas que podrías plantearlos?

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

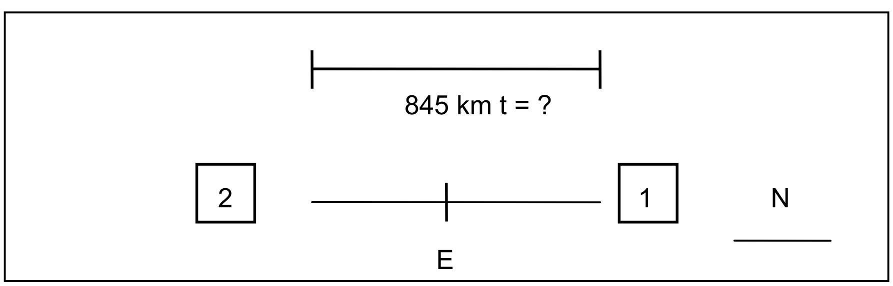
Para que ejercites los tres métodos que analizamos en este tema, resuelve los siguientes problemas por el método que se indica.

<u>POR ENSAYO Y ERROR</u>:

1) Dos trenes salen de la estación al mismo tiempo, uno hacia el norte y otro hacia el sur ¿cuánto tiempo tardan en distanciarse 845 km entre ambos, si la velocidad del primero es de 100 km/h, y el segundo va a 95 km/h?

Respuesta: ____________________

Para resolver este problema, deberás aumentar las horas. Si con esto no llegas al resultado exacto, transforma las horas a minutos. Para dar la respuesta, vuelve a transformar los minutos a horas.



2) ¿Qué número habrá que sumar a 25 y 30, para que el producto de los resultados sea 1974?

Respuesta: ______________

Recuerda que cuando hablamos de producto, nos referimos al resultado de una multiplicación.

3) Se invierten $1,000.00 en el banco a un interés de 10% anual ¿cuántos años tendrán que pasar para obtener más de $ 5,000.00 si se reinvierten los intereses?.

Recuerda que para sumarle el 10% a una cantidad se multiplica la cantidad por 1.1.

POR RAZONES Y PROPORCIONES

4) Una compañía arrendadora de automóviles cobra por la renta de un auto $120.00 diarios, más $2.00 por kilómetro recorrido; otra compañía cobra por la renta del mismo auto $80.00 diarios, más $2.50 por kilómetro recorrido ¿cuántos kilómetros se deben recorrer diariamente para que la renta del automóvil sea la misma en las dos compañías?.

   Respuesta: ________________

   Para solucionar este problema, primero aplica el método de ensayo y error para dos valores; después encuentra el coeficiente de proporcionalidad; con éste, calcula el valor que se solicita.

   Si no lo puedes solucionar por este método, escribe en media cuartilla las razones.

5) Dos trenes salen de la estación al mismo tiempo, uno hacia el norte y otro hacia el sur ¿cuánto tiempo tardan en distanciarse 768 km entre ambos, si la velocidad del primero es de 80 km/h y del segundo de 90 km/h?.

   Inicia la resolución de este problema por ensayo y error; después obtén el coeficiente de proporcionalidad y calcula el valor que se solicita.

   Si no puedes resolverlo por este método explica las razones en media cuartilla.

POR DIAGRAMAS DE OPERACIONES

6) Juan abrió una cuenta de cheques con una cierta cantidad el día primero de enero. El día 5 hizo un depósito de $200.00; el 10 extendió un cheque por una cantidad igual a la mitad de su saldo del día 5; el día 15 hizo un depósito por una cantidad que le triplicó su saldo del día 10 y el día 25 hizo un retiro de $ 50.00 ¿Cuál es la cantidad inicial con la que abrió Juan su cuenta de cheques, si el banco le informa que a fin de mes tiene un saldo de $400.00?.

   Respuesta: ______________________

   Lee con cuidado el problema, al tiempo que haces el diagrama original una vez que lo tengas terminado, realiza las operaciones.

7) José compra un cierto producto cada año. En 1988 le costó una cierta cantidad. Para 1989 lo compró $50.00 más barato; en 1990 era cuatro veces más caro que en 1989; en 1991, en una oferta, lo compró a mitad de precio del año anterior y en 1992 compró el producto en $400.00, lo que representa $100.00 más que en 1991. ¿Cuál fue el precio del producto en 1989?.

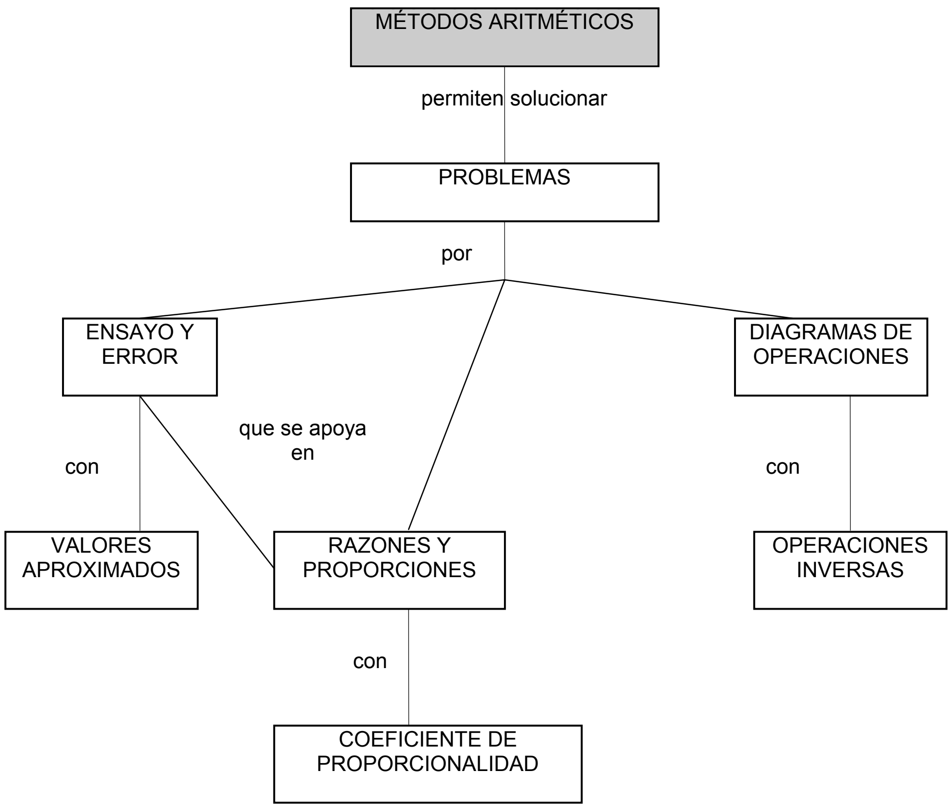
Respuesta: ______________________

Lee con cuidado el problema, no te confundas con los años, el procedimiento es exactamente el mismo que en el caso anterior.

EXPLICACIÓN INTEGRADORA

Hasta aquí hemos revisado tres métodos aritméticos que nos sirven para solucionar problemas donde nos hace falta un valor. Las operaciones que aplicamos en la mayoría de los casos, fueron las básicas: suma, resta, multiplicación y división, también aplicamos el por ciento, en los problemas que solucionamos por razones y proporciones.

En el siguiente mapa conceptual podrás observar la síntesis de este tema:



También incluimos que cuando no contamos con dos datos en un problema no podemos solucionarlos con los métodos aritméticos. Este tipo de problemas se resuelven con los modelos algebraicos que abordaremos en el siguiente tema, con la finalidad de reconocer su lenguaje.

2.2 MODELOS ALGEBRAICOS

Los modelos algebraicos son una herramienta que nos ayuda a solucionar problemas cotidianos, cuando no contamos con dos datos o más. Para construir este tipo de modelos, debemos traducir el lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico, para lo cual representamos las incógnitas con una literal; formamos una expresión, y hacemos uso de la igualdad "=" para así establecer la ecuación a resolver.

EJEMPLOS

Queremos saber qué número le tenemos que sumar a 10 y restar al 18 para obtener la misma cantidad.

Para iniciar la construcción de un modelo algebraico, debemos precisar el valor (o valores) que deseamos encontrar, sin recurrir al ensayo y error; a éste valor le llamaremos incógnita.

En el problema planteado, la incógnita es el número que le tenemos que sumar a 10 y restar a 18 para obtener la misma cantidad.

Posteriormente, es necesario representar la incógnita con una letra o literal x.

Al sustituir el valor que deseamos encontrar por la literal "x", en el ejemplo que estamos analizando, formaríamos la expresión 10 + x, así como 18 - x. Si decimos que los resultados de estas expresiones deben ser iguales entonces podemos representarlas con la siguiente expresión:

$$10 + x = 18 - x$$

Encontrar el número buscado, se reduce entonces, a encontrar un número tal, que al ser sustituido por la literal x, en la expresión anterior, haga que en ambos lados se obtenga el mismo valor.

No ha sido una casualidad que usemos la palabra expresión para referirnos a 10 + x, 18 - x, así como a 10 + x = 18 - x. El concepto expresión está relacionado al lenguaje o lengua. Es muy común usar como *sinónimos expresión y oración.*

En el siguiente cuadro podemos ver como las expresiones x; 10 + x; 18 - x, así como 10 + x = 18 - x son semejantes a una oración, a través de las cuales comunicamos una idea concreta.

LENGUAJE COMÚN	EXPRESIÓN
Queremos saber qué número	x
le tenemos que sumar a 10	10 + x
y restar a 18	18 - x
para obtener la misma cantidad	10 + x = 18 - x

Tabla 10. En la columna izquierda, aparecen oraciones o ideas en el lenguaje cotidiano. En la columna derecha, puedes observar una forma de representar esas ideas al substituir el valor que queremos encontrar por "x".

Las expresiones que aparecen en la columna de la derecha de la tabla 10, son oraciones de un lenguaje cotidiano, el cual es traducido a un lenguaje algebraico. Ahora bien cuando dos expresiones involucran el signo igual (=), son llamadas igualdades ó ecuaciones. Las expresiones que aparecen a cada lado del signo =, se llaman miembros de la ecuación.

Es necesario aclarar que en este capítulo, únicamente estamos analizando como se construyen los modelos algebraicos, por lo que no abordaremos el procedimiento para resolverlos. Dichos procedimiento lo estudiarás en los siguientes fascículos de esta asignatura.

Con la única finalidad de que compruebes que la ecuación tiene el mismo valor en ambos miembros, te proporcionamos el valor de "x", el cual es 4.

Entonces, sustituyendo las incógnitas por el valor de 4, encontramos que dicha igualdad se cumple:

$$10 + 4 = 18 - 4$$

$$\boxed{14 = 14}$$

EJEMPLO

Actualmente, mi padre tiene 46 años y yo tengo 17. ¿Dentro de cuántos años, mi edad será exactamente la mitad de la edad que tendrá mi padre? Es claro que actualmente mi edad (17 años), es menor que la mitad de la de mi padre (23 años).

En este ejemplo, es importante destacar la dificultad para determinar cuáles son las operaciones aritméticas que se realizarán con los datos numéricos, para encontrar el valor que requerimos (el número de años que tienen que pasar para que, en ese momento, mi edad sea la mitad de la de mi padre).

Independientemente de que este ejemplo parezca más complicado que el anterior, procederemos de la misma forma. Primero determinemos nuestra incógnita, que en este caso es el número de años que tiene que transcurrir para que mi edad sea la mitad de la de mi padre.

Ahora sustituyamos la incógnita, por la literal x, para así formar las expresiones que solucionarán este problema. Observa la tabla 11, en la que aparece la traducción del problema del lenguaje común, al lenguaje algebraico:

LENGUAJE COMÚN	**EXPRESIÓN**
Edad actual de mi padre	46
Mi edad actual	17
Después de ciertos años	x
La edad de mi padre será	46 + x
Yo tendré	17 + x
De tal forma que la mitad de la de mi padre.	$\frac{46+x}{2}$
Será igual a la mía	$17 + x = \frac{46 + x}{2}$

Tabla 11. Con esta tabla hemos traducido el problema del lenguaje común al lenguaje algebraico, hasta obtener la ecuación que le dará solución.

Así, las expresiones algebraicas que obtenemos son: $x; 46 + x; \frac{46+x}{2}$, así como $17 + x = \frac{46 + x}{2}$.

Y a su vez, esta última es la ecuación que dará respuesta a nuestro problema.

Igual que en el ejemplo anterior , te daremos el valor de “x” para que compruebes que en ambos miembros de la ecuación se obtiene la misma cantidad, cumpliéndose de esta forma la igualdad.

El valor de “x” es 12, y al sustituirlo en la ecuación encontramos que:

$$17 + 12 = \frac{46 + 12}{2}$$

$$29 = \frac{58}{2}$$

$$29 = 29$$

Lo cual quiere decir que dentro de 12 años mi edad (29 años) será exactamente la mitad de la de mi padre (58 años).

Antes de dar otros ejemplos y como una prueba de la utilidad y amplia aplicabilidad de la herramienta que hasta aquí hemos desarrollado, haremos uso de ella para resolver el ejemplo.

EJEMPLO

Pedro pensó un número al cual multiplicó por 2, a cuyo resultado le sumó 5, para después dividir por 5, sumar el número que pensó, multiplicar por 8, finalmente restar 3 y obtener como resultado el número 61. ¿Cuál es el número que pensó Pedro?

Como dijimos en el problema anterior, el primer paso consiste en identificar las cantidades que deseamos conocer. En este problema, es claro que esta cantidad es el número. Al hacer uso de esta letra, el resto de los elementos del problema quedarían expresados de la siguiente manera:

Pedro pensó un número *x* al cuál multiplicó por dos (2x), a cuyo resultado le sumó cinco (2x + 5), para después dividir por cinco $\left(\frac{2x+5}{5}\right)$, sumar el número que penso $\left(\frac{2x+5}{5}+x\right)$, multiplicar por ocho $8\left(\frac{2x+5}{5}+x\right)$, y finalmente restar tres $8\left(\frac{2x+5}{5}+x\right)-3$, y obtenemos como resultado el número 61; $8\left(\frac{2x+5}{5}+x\right)-3=61$.

Todo esto queda resumido en la tabla 12.

LENGUAJE COMÚN	LENGUAJE ALGEBRAICO
Pedro pensó un número	x
el cual multiplicó por 2	2x
a cuyo resultado le sumó 5	2x + 5
para después dividir por 5	$\frac{2x+5}{5}$
sumar el número que pensó	$\frac{2x+5}{5}+x$
multiplicar por 8	$8\left(\frac{2x+5}{5}+x\right)$
para finalmente restar 3	$8\left(\frac{2x+5}{5}+x\right)-3$
obteniendo el número 61	$8\left(\frac{2x+5}{5}+x\right)-3=61$

Tabla 12. En esta aparece la traducción del problema del lenguaje común al algebraico.

Así la ecuación:

$$8\left(\frac{2x+5}{5}+x\right)-3=61$$

representa el problema planteado en lenguaje algebraico.

A partir de aquí empezaremos a realizar operaciones, de tal forma que obtengamos diferentes ecuaciones equivalentes, hasta lograr despejar la incógnita x. Por ahora ya no haremos este trabajo. Sin embargo, te podrás dar cuenta que tomando x = 5 en la ecuación anterior, obtienes la igualdad 61 = 61. Es decir, el número que pensó Pedro fue 5.

EJEMPLO

Un caballo y un mulo caminaban juntos y llevaban pesados sacos sobre sus lomos. Lamentábase el jamelgo de su enojosa carga, a lo que el mulo le dijo: "¿De qué te quejas?. Si yo te tomara un saco, mi carga sería el doble que la tuya. En cambio, si te doy un saco, tu carga se igualará a la mía". ¿Cuántos sacos llevaba el caballo y cuántos el mulo?

En este problema necesitamos dos datos: el número de sacos que lleva el caballo y el número de sacos que lleva el mulo. Para diferenciarlos, debemos asignarles literales que no sean iguales. Representemos con la letra "x" el número de sacos que lleva el caballo y con la letra "y" el número de sacos que lleva el mulo.

Expresemos ahora el resto de los elementos del problema haciendo uso de estas letras.

El mulo dice: "Si yo te tomara un saco", de modo que el caballo quedaría ahora con x - 1 sacos, "mi carga", que ahora sería igual a y + 1 sacos, "sería el doble que la tuya", es decir, tendríamos la ecuación:

$$\mathbf{2(x - 1) = y + 1}$$

y el mulo continua diciendo: "Y si yo te doy un saco", de modo que su carga sería ahora de y - 1 sacos, "tu carga", que ahora sería de x + 1 sacos, "se igualará a la mía", es decir, tendríamos la ecuación:

$$\mathbf{y - 1 = x + 1}$$

Lo hecho anteriormente quedaría resumido en el siguiente cuadro:

LENGUAJE COMÚN	LENGUAJE ALGEBRAICO
Si de tu carga	**x**
tomara un saco	**x - 1**
y a mi carga	**y**
se le agregara	**y + 1**
mi carga sería el doble de la tuya	**y + 1 = 2 (x - 1)**
y si te doy un saco	**y - 1**
tu carga	**x + 1**
se igualará a la mía	**y-1 = x+1**

Tabla 13 Observa que para solucionar este problema debemos encontrar el valor de “x” así como el de “y”. Además que se forman dos ecuaciones.

Como te habrás dado cuenta, este problema tiene algunas diferencias sustanciales con los anteriores. En este caso el número de cantidades a determinar son dos y por lo tanto hay dos incógnitas. En segundo término, el problema queda modelado por dos ecuaciones en las que aparecen ambas incógnitas, a saber:

$$\mathbf{y + 1 = 2(x - 1) \qquad y - 1 = x + 1}$$

En este caso decimos que para encontrar la solución del problema, tenemos que resolver un sistema de dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas. Observa que en este caso, la solución debe estar dada por un par de números que, al ser sustituidos por *x* y *y* en estas ecuaciones, en ambas debemos de obtener una igualdad.

De hecho, puedes verificar fácilmente que, al tomar **y = 7 y x = 5** obtienes estas igualdades.

El siguiente ejemplo nos permitirá dar una clasificación más precisa de las ecuaciones.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Realiza lo siguiente:

A un terreno de forma cuadrada se le quitó una franja de 3 km de ancho de su costado oriental y una franja de 4 km de ancho de su costado norte, con lo cual su superficie quedó reducida a la mitad. ¿De qué dimensiones era el terreno original?

Como en los dos problemas anteriores, lo primero que tenemos que hacer es determinar cuál es o cuáles son las cantidades que hay que encontrar. Ya que el problema pide determinar las dimensiones de un terreno de forma cuadrada, basta con encontrar cuánto mide uno de sus lados (el resto de los lados medirán lo mismo). Digamos que la letra x representa la longitud de cada lado del cuadrado. A fin de poder expresar el resto de los elementos del problema en términos de la incógnita x, nos auxiliaremos de un dibujo que nos represente la situación descrita en el problema (este es un recurso muy útil siempre que el problema lo permita).

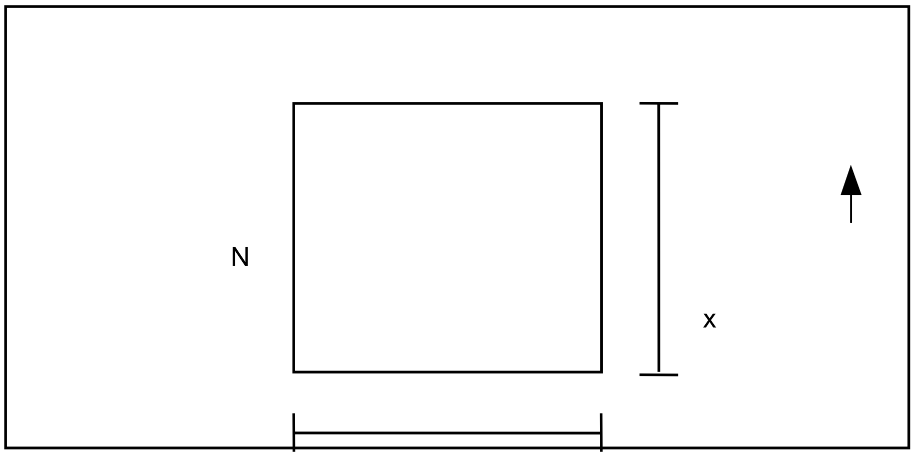


Figura 3. El terreno completo.

El cuadrado de arriba representa nuestro terreno. A la superficie original del terreno xx, se le quita una franja de 3 km de ancho en su parte oriental y una franja de 4 km de ancho en su costado norte.

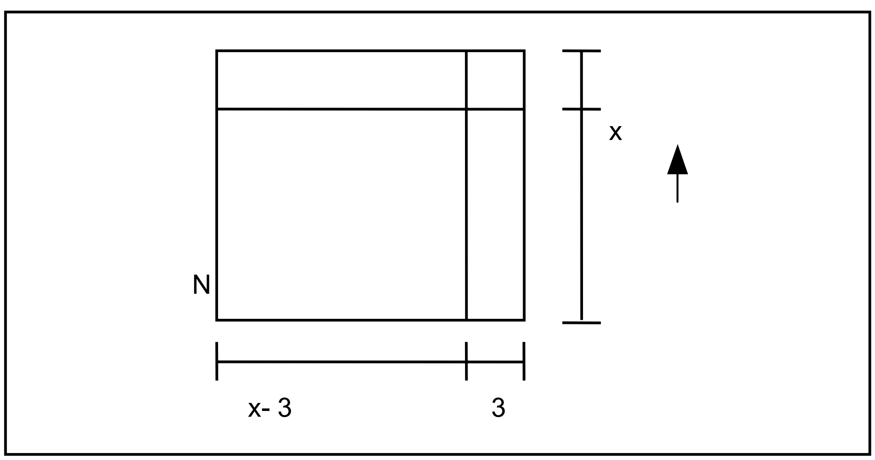


Figura 4. El terreno señalando los 3 km y 4 km que se le quitará del lado oriente y norte.

Por lo que la superficie del nuevo terreno, ahora representada por (x - 3) (x - 4) queda igual a la mitad de la superficie original, es decir.

$$(x-3)\ (x-4) = \frac{(x)(x)}{2}$$

Al desarrollar la expresión del primer miembro de la ecuación obtendríamos el siguiente modelo algebraico.

$$x^2 - 7x + 12 = \frac{x^2}{2}$$

Escrita la ecuación de esta manera, es fácil distinguir sus semejanzas y sus diferencias con la ecuación del problema de las edades. Esta ecuación y la de ese problema tienen en común la propiedad de que en ambas aparece una sola incógnita. Sin embargo, en esta última ecuación la incógnita aparece elevada al cuadrado, mientras que en la primera la incógnita aparece elevada a la potencia 1. Esta diferencia hace que las ecuaciones reciban nombres distintos. en el caso de la ecuación del problema de las edades decimos, que tenemos una ecuación de primer grado (dado que la incógnita sólo aparece elevada a la 1 con una incógnita, mientras que en el problema del terreno cuadrado se dice que la acuación es de segundo grado (dado que la incógnita aparece elevada al cuadrado) con una incógnita.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Traduce al lenguaje algebraico los siguientes problemas:

1) Una compañía arrendadora de automóviles cobra por la renta de un auto $120.00 diarios, más $2.00 por kilómetro recorrido. Otra compañía cobra por la renta del mismo auto $80.00 diarios más $2.50 pesos por kilómetro recorrido. ¿Cuántos kilómetros se deben recorrer diariamente para que la renta del automóvil sea la misma en las dos compañías?

    Modelo Algebraico: ____________________

2) La inflación en los últimos tres años fue de 35%, 20% y 13% respectivamente. ¿Cuál era el precio de un artículo hace tres años si ahora cuesta $338.66? Si suponemos que su precio ha crecido al mismo ritmo que la inflación.

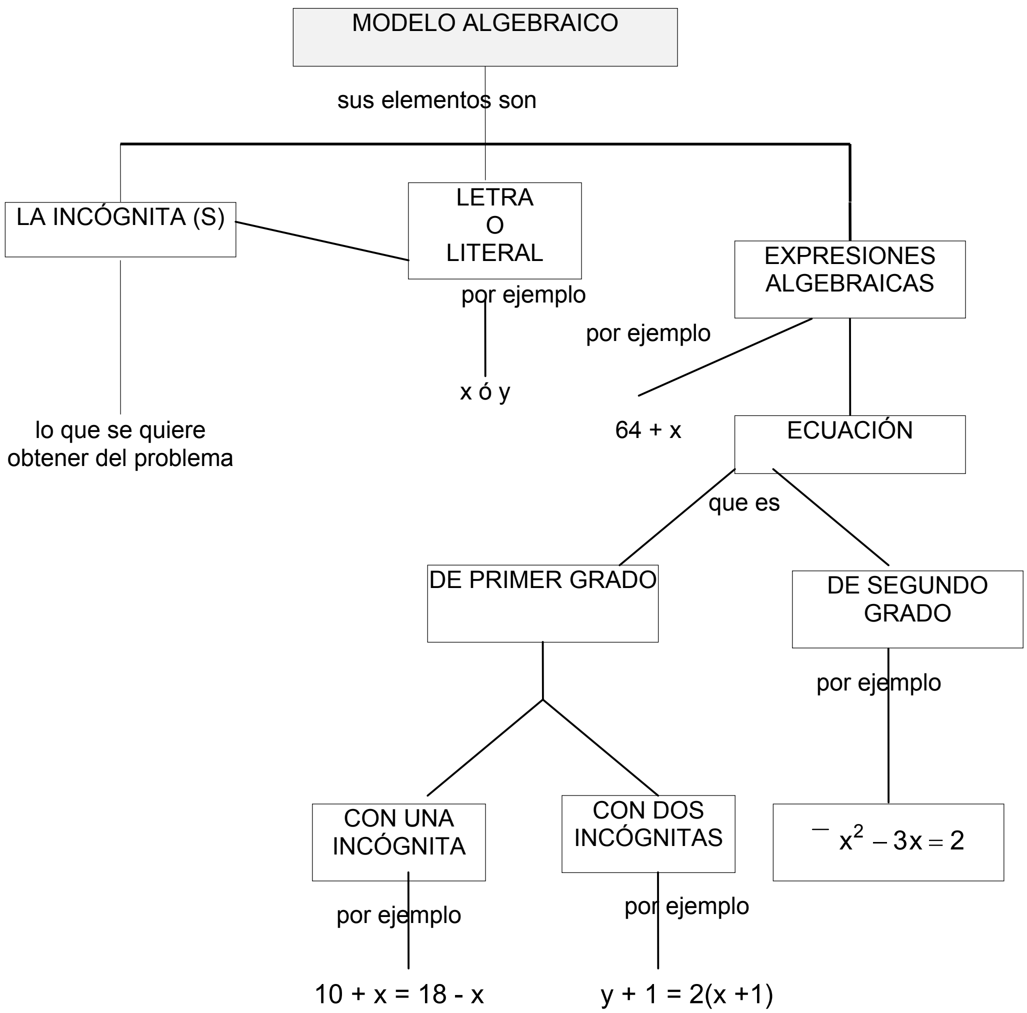
    Modelo Algebraico: ____________________

Recuerda que nuestro objetivo es traducir del lenguaje común al algebraico, por lo que no es necesario que llegues a la solución a través del modelo algebraico.

EXPLICACIÓN INTEGRADORA

En este tema aprendiste a traducir sin problema del lenguaje común al lenguaje algebraico, para formar modelos algebraicos; que no son mas que una forma de representar los problemas que queremos resolver.

En el siguiente mapa conceptual aparecen los conceptos más importantes del tema y sus relaciones.



R E C A P I T U L A C I Ó N

En este capítulo te presentamos algunas ideas para resolver un tipo de problemas, aquéllos en los que conocemos los resultados de cierto tipo de operaciones, además nos interesa conocer la cantidad de que partimos.

Usamos para su resolución el método de ensayo y error, el cual por lo general involucra procedimientos largos y laboriosos, y nos hemos apoyado, cuando el problema lo admitió, en el concepto de proporcionalidad, para hacer más eficientes estos procedimientos.

Vimos también un primer modelo de algunos de ellos los diagramas de operaciones y establecimos así procedimientos más generales que los de ensayo y error.

Finalmente propusimos el uso del lenguaje algebraico, para establecer modelos algebraicos generales de estas situaciones, que nos permitirán establecer procedimientos también generales para la resolución de estos problemas.

Esto es, buscamos a través de la utilización de los métodos descritos para la resolución de estos problemas, los más generales y eficientes. Hasta este momento hemos propuesto el lenguaje algebraico para establecerlos, por medio del uso de modelos algebraicos, en particular, del establecimiento de ecuaciones.

ACTIVIDADES INTEGRALES

Con la finalidad de que compares los procedimientos para solucionar problemas para los diferentes métodos que hemos analizado en este capítulo resuelve los siguientes problemas:

1.La suma de 3 números consecutivos es 186.

a) Determinar esos 3 números aplicando el método de ensayo y error.

b) Interpreta el enunciado en un modelo algebraico.

2.La señora Arzate invierte en el banco $4,500.00 y le da un rendimiento de $720.00 mensuales.

¿Cuánto deberá invertir para ganar $740.00; $780.00 y $880.00

a) Resuelve el problema mediante el método de ensayo y error.

b) Resuelve el problema aplicando razones y proporciones
.
c) Interpreta el problema en un modelo algebraico.

3) Una industria textil que fabrica hilos de algodón, tiene un gasto semanal de mano de obra para la elaboración de su producto de $15,820.00

En el departamento de batientes se gasta una cierta cantidad. En el departamento de cardas gasta $280.00 más que en el de batientes. En el departamento de estiradores gasta $1,680.00 menos que en el segundo departamento. En el de troziles gasta $560.00 más que en el departamento de estiradores y en el departamento de coneras se gasta una cantidad igual a la de cardas.

a) Intenta resolver el problema aplicando diagramas de operaciones y si no lo lograste, indica por qué.

b) Interpreta el problema mediante el modelo algebraico.

AUTOEVALUACIÓN

A fin de que compruebes que los procedimientos que aplicaste para resolver los problemas de las actividades integrales, te presentamos a continuación los resultados a los que debiste llegar.

1. La suma de 3 números consecutivos es 186.

a) El número inicial es 61; ya que 61+62+63=186

b) El modelo algebraico es:

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 186$$

2. La señora Arzate invierte en el banco $4,500.00 y le da un rendimiento de $720.00 mensuales.

a) Debiste buscar el tanto por ciento de intereses que recibe la señora Arzate, hasta encontrar 16% y posteriormente buscar las cantidades que al obtenerles el 16% dé como resultado, los valores planteados

b) En este caso no es necesario determinar el % de interés de 4500.00, ya que podemos obtener las cantidades desconocidas obteniendo el coeficiente de proporcionalidad de la siguiente manera.

4500	720
1	740
2	780
3	880

Paso 1: $\frac{740}{720} = 1.0277 = \frac{?}{4500} = 4624.6 \approx \mathbf{4625}$

Paso 2: $\frac{780}{720} = 1.0833 = \frac{?}{4500} = 4874.8 \approx \mathbf{4875}$

Paso 3: $\frac{880}{720} = 1.2222 = \frac{?}{4500} = 5499.9 \approx \mathbf{5500}$

c) Debiste establecer una ecuación para cada valor dado:

$4500\ (x) \qquad = 720$

$x_1[x] = 740$

$x_2[x] = 780$

$x_3[x] = 880$

3. Una industria textil que fabrica hilos de algodón, tiene un gasto semanal de mano de obra para la elaboración de su producto de $15820.00

a) $\boxed{?} \xrightarrow{-\,280} \boxed{C} \xrightarrow{+\,1680} \boxed{} \xrightarrow{-\,560} \boxed{} \xrightarrow{?} \boxed{C} \xrightarrow{?} \boxed{15820}$

Este problema no se puede resolver aplicando este método, ya que existen varias incógnitas que tenemos que obtener.

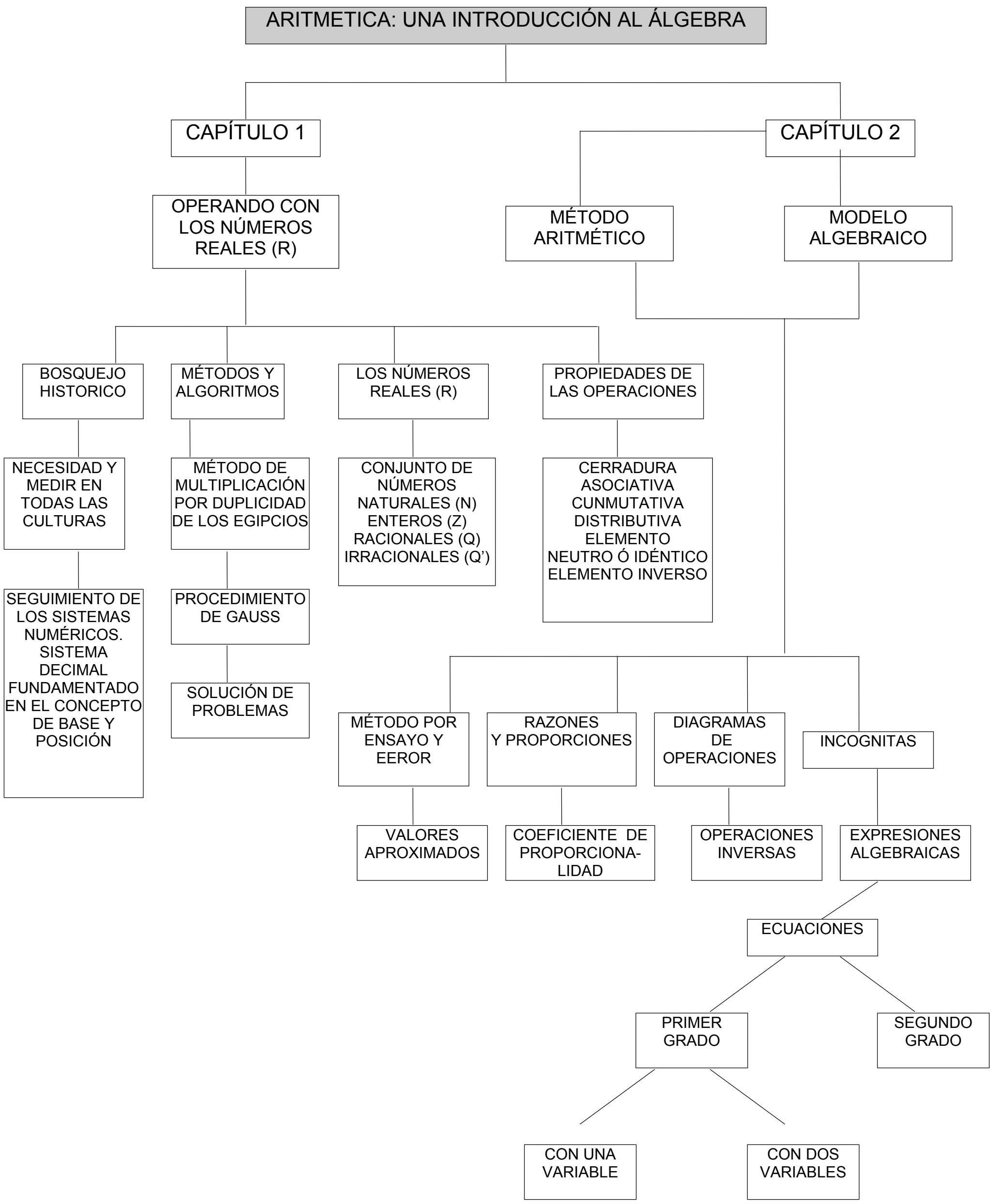
b) $x + (x + 280) + (x + 280 - 1680) + (x + 280 - 1680 + 560) + (x + 280) = 15820$

ó $x + (x + 280) + (x - 1400) + (x - 840) + (x + 280) = 15820$

Resolviendo el modelo, obtenemos como solución $x = 3500$

RECAPITULACIÓN GENERAL

En el siguiente esquema te presentamos una síntesis de los aspectos más relevantes de este fascículo, para que tengas la posibilidad de repasar los temas que ya estudiaste.



ACTIVIDADES DE CONSOLIDACIÓN

Resuelve los siguientes problemas considerando lo que estudiaste en el fascículo y si tienes dudas, revisa los ejemplos y ejercicios que trabajaste.

1. Escribe en forma desarrollada y en potencias de diez las siguientes cantidades.

   a) 2897 =
   b) 53,915 =
   c) 234,756 =

2. Aplica el método que se te indica para resolver los siguientes ejercicios:

   a) Determina el resultado del producto 98 x 67 por duplicación de los egipcios.

   b) Escribe la expresión y el resultado de la siguiente serie de números aplicando el método de Gauss. (- 40) + (- 37) + (- 34) + ...+ 29 + 32 + 35

3. Justifica las propiedades que se están aplicando en cada paso de las siguientes operaciones.

a)	(3 + 2) + (5 + 8)	=	(2 + 3) + (8 + 5)
		=	[2 + (3 + 8 + 5)]
		=	18
b)	(7 + 6) + 3(2 + 8)	=	(6 + 7) + 3(8 + 2)
		=	(6 + 7) + (24 + 6)
		=	(6 + 7 + 24 + 6)
		=	43

4. Realiza las siguientes operaciones con números reales.

   a) [(5 + 8)2] =

   b) [- 3 + 5(6 - 1) - 2] - [2 + 5 (2)] =

   c) - [- (-3) + 4 (7 - 9)] [5 - (6 + 3)] =

   d) [2 - 6 (4 - 5)] [- 2(- 1) - 4(- 3)] [- 5 + (4 - 6)] =

e) $\frac{2}{5}+\frac{3}{2}-\frac{1}{5}=$

f) $-\frac{1}{3}\left[\frac{6}{5}+\frac{8}{15}-\frac{2}{3}\right]+\frac{3}{7}=$

g) $\left(-\frac{8}{7}\right)\left[\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\right]=$

h) $\left[\frac{3}{8}-\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)+\frac{3}{11}\right]\left[\frac{1}{18}\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{10}\right)\right]=$

i) $4+\cfrac{1}{1-\frac{3}{8}}=$

j) $3-\cfrac{3\left(\frac{1}{2}\right)}{1+\frac{2}{5}}=$

5. Resuelve los siguientes problemas, aplicando el método de ensayo y error.

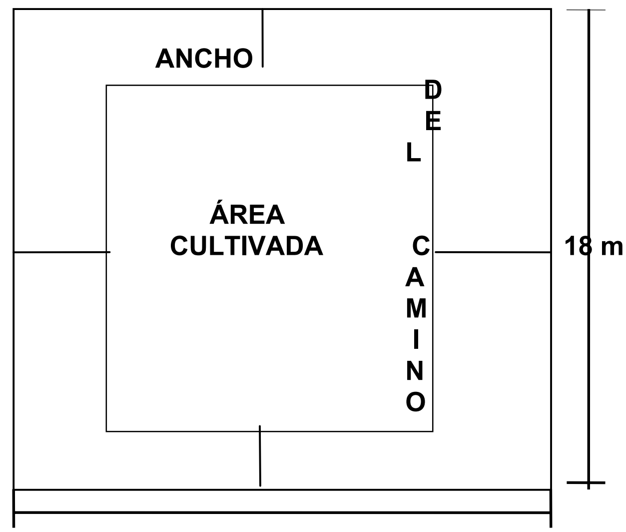
a) ¿Qué número habrá que sumar a 4 y 11 para que el producto de ambos sea el mínimo común múltiplo de 10 y 24?

b) Un individuo dispone de un terreno cuadrado que mide 18 m por lado, en el cual desea cultivar verdura en una parte cuadrada cuya área sea de 132.25 m^2 como lo muestra la figura.

La condición que el quiere es que el área cultivada quede centrada en el terreno, con el fin de que exista un camino alrededor.

¿Cuánto debe medir cada lado de la parte cultivada?

¿Cuánto debe medir el ancho del camino que rodea la parte cultivada?



6. Resuelve los siguientes problemas aplicando el método de proporcionalidad.

a) El precio de venta de un engrane actualmente es de 27.6 dólares y hace un año costaba 24 dólares.

Si un rodillo metálico actualmente cuesta 43.7 dólares ¿Cuánto costaba hace un año considerando que el aumento de ambos productos fue en la misma proporción.

b) Don Arnulfo dejó una herencia de $750,000.00 para sus 4 hijas; a Lulú le tocó la mitad, a Bety la cuarta parte, a Ema la quinta parte y a Cata el resto.

El hermano de Arnulfo cuando se muera pretende dejar una cierta cantidad de herencia, la cual se deberá repartir a sus cuatro sobrinas en la misma proporción que la herencia de Arnulfo. Si a Bety le pretende dejar $420,000.00 ¿Qué cantidad de herencia dejará su tío?

7. Plantea el modelo algebraico que permite obtener la solución de cada enunciado que a continuación aparece.

a) Un puente tiene una determinada longitud de largo, la cual está compuesta por tres secciones, la central tiene 100 mts. de largo y cada sección de los extremos representa una sexta parte de la longitud total del puente. Con base a lo anterior, construye el modelo algebraico que representa la longitud del puente.

b) La suma de dos números enteros nos da como resultado 24 y la diferencia del triple de cada uno de ellos nos da el mismo resultado de la suma. ¿Cuáles son esos números?

c) Una habitación rectangular tiene de largo tres veces su anchura y su área mide 432 m^2. Construye el modelo algebraico que representa el valor del área.

AUTOEVALUACIÓN

1. A continuación te presentamos los resultados de los problemas anteriores para que puedas comparar tus resultados, y así conocer los avances de lo que has aprendido.

   a) $2 \times 1000 + 8 \times 100 + 9 \times 10 + 7 \Rightarrow 2 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 7 \times 1$

   b) $5 \times 10{,}000 + 3 \times 1000 + 9 \times 100 + 1 \times 10 + 5 \Rightarrow 5 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 5 \times 1$

   c) $2 \times 100{,}000 + 3 \times 10{,}000 + 4 \times 1000 + 7 \times 100 + 5 \times 10 + 6$
   $\Rightarrow 2 \times 10^5 + 3 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 6 \times 1$

2.

a)

$\mapsto$	1	$\mapsto$	98	
$\mapsto$	2	$\mapsto$	196	
	4		392	
	8		784	
	16		1568	98 + 196 + 6272 = 6566
	32		3136	
$\mapsto$	64	$\mapsto$	6272	

b) Expresión: (- 5) x 13
Resultado: - 65

3.

a) Conmutativa
Asociativa
Cerradura

b) Conmutativa
Distributiva
Asociativa
Cerradura

4.

a)	26
b)	8
c)	- 20
d)	- 784
e)	17/10
f)	23/315
g)	- 16/105
h)	- 241/79200
i)	28/5
j)	27/14

5.

a) (4 + 4) x (11 + 4) = 120 M.C.M de 10 y 24 es 120
El número que habrá que sumar es “4”

b) Lado = 11.5 x 11.5 = 132.25 m^2 Cada lado debe medir 11.5 mts.
Ancho = 3.25 mts.

6.

a)

PRODUCTO	HACE UN AÑO	ACTUAL
ENGRANE	24	27.6
RODILLO	¿ ?	43.7

$$K = \frac{43.7}{27.6} = 1.58\bar{3}$$

Precio del rodillo hace un año = $1.58\bar{3}(24)$

= 38 dólares

b)

PERSONA	HERENCIA	LULÚ	BETY	EMA	CATA
ARNULFO	750,000	375,000	187,500	150,000	37,500
HERMANO	¿ ?		420,000		

$$K = \frac{420{,}000}{187{,}500} = 2.24$$

Herencia del hermano = 2.24 (750,000) = $ 1,680,000.00

7.

$\boxed{\text{a) } x = 100 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}x}$

$\boxed{\text{b) } x + y = 24;\ 3x - 3y = 24}$ ó $\begin{matrix} x + y = 24 \\ 3x - 3y) = 24 \end{matrix}$

$\boxed{\text{c) } (3x)\ (x) = 432}$

ACTIVIDADES DE GENERALIZACIÓN

Al aplicar los conocimientos que adquiriste realiza las siguientes situaciones, esto te servirá para reforzar tu aprendizaje sobre este tema.

A. Trata de conseguir un ticket de las compras en una tienda de autoservicio, una nota de remisión cuando se compran varios artículos de diferentes especies un recibo de luz o de teléfono o cualquiera de ellos cuando tiene crédito a su favor.

B. Identifica en estos documentos cómo las personas, una máquina registradora o en su caso una computadora utilizan algunas propiedades de los números reales para facilitar las operaciones.

. ¿Las identificaste?

. ¿Te das cuenta de la importancia que tienen estas propiedades?

. ¿Te habrás imaginado que estas propiedades fueran utilizadas constantemente en nuestra vida cotidiana?

Pregunta a tu asesor si lo anterior es factible y, si lo es pide su ayuda para encontrar otros ejemplos.

Ahora que conoces, trata de utilizarlas de manera que faciliten tus actividades cuando tratas de operar con números.

GLOSARIO

En este apartado encontrarás algunos términos que se vieron a lo largo del fascículo y que podrás consultar su significado.

ALGORITMO. Es el procedimiento empleado para obtener el resultado de una operación. La palabra algoritmo es una deformación de ALKHOWARIZMI, nombre de un célebre matemático árabe que vivió en el siglo IX a C.

NÚMERO. Expresión de la cantidad con relación a una unidad.

INVERSO ADITIVO. Es un número opuesto de signo contrario.

SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES: Es el conjunto de los números $\mathbb{R}$ que se pueden asociar con puntos R situados sobre una línea recta de tal manera que cada punto está a una distancia r del punto fijo 0.

NÚMERO PRIMO. Son los números naturales mayores que la unidad que sólo tienen dos divisores exactos, es decir sólo se dividen entre la unidad y entre sí mismos.

VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO. El valor absoluto o valor numérico de un número real negativo es el número mismo positivo.

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

ALARCÓN et al.: **Matemáticas 1. Enseñanza Media Básica.** FCE, México, 1990.

ALARCÓN et al.: **Matemáticas 2. Enseñanza Media Básica**. FCE, México, 1991.

BARNETT Y NOLASCO: Álgebra Elemental. **Estructura y Aplicaciones**. Editorial Mc. Graw-Hill. México, 1986.

BRITON Y BELLO: **Matemáticas Contemporáneas**. 2a. Edición. Harla México, 1982.

GAUSS Carlos F. **El Develador de las Incógnitas**. Editorial Pangea.

GRIJALBO: **El Parque**. Biblioteca Juvenil, México, 1975.

PERELMAN et al: ***Álgebra Recreativa***. Ediciones Quinto Sol, Harla, México, 1983.

PHILIPS ET AL: **Álgebra con Aplicaciones**. Harla, México, 1983.

ROBLEDO Y CRUZ: **Matemáticas uno Primer Grado**. 4a. reimpresión. Trillas, México.

TONDA Y NOREÑA: **Los Señores del Cero**. Editorial Pangea.